

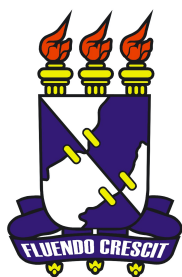
CHARLES BRAGA AMORIM

**EXISTÊNCIA E SIMETRIAS PARA UMA EQUAÇÃO ELÍPTICA  
NÃO-LINEAR COM POTENCIAL MONOPOLAR E ANISOTRÓPICO**

São Cristovão - SE

2015





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Exatas e da Terra

**CHARLES BRAGA AMORIM**

**EXISTÊNCIA E SIMETRIAS PARA UMA EQUAÇÃO ELÍPTICA  
NÃO-LINEAR COM POTENCIAL MONOPOLAR E ANISOTRÓPICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, exigida como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Éder Mateus de Souza**

**Coorientador: Marcelo Fernandes de Almeida**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DIS-  
SERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO CHARLES BRAGA  
AMORIM, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ÉDER MATEUS  
DE SOUZA.

**Assinatura do Orientador**

---

**Assinatura do Coorientador**

---

**SÃO CRISTÓVÃO - SE**

**2015**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

A524e Amorim, Charles Braga  
Existência e simetrias para uma equação elíptica não-linear  
com potencial monopolar e anisotrópico / Charles Braga Amorim ;  
orientador Éder Matheus de Souza. – São Cristóvão, 2016.  
62 f.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2016.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Simetria  
(Matemática). 4. Anisotropia. I. Souza, Éder Matheus de, orient. II.  
Título.

CDU: 517.956.2



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Existência e Simetrias para uma Equação Elíptica não - linear  
com Potencial Monopolar e Anisotrópico.**

*por*

*Charles Braga Amorim*

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Eder Mateus de Souza - UFS

Orientador

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB

Primeiro Examinador

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso – UFS

Segundo Examinador

São Cristóvão, 27 de fevereiro de 2015.

## Abstract

This master thesis is concerned to nonlinear elliptic problem with mono-polar anisotropic potential

$$\begin{cases} \Delta u + u|u|^{p-1} + V(x)u + f(x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0, \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

provided  $n \geq 3$  and  $p > \frac{n}{n-2}$ . These results, between others things, deals with sub-critical, critical and super-critical nonlinearity. We obtain well-posedness of solutions, regularity in  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , symmetries and asymptotic behavior of solutions in singular spaces  $H_k$ . We employ Banach fixed technique and a theorem of regularity elliptic to get those results, this technique does not need of the Hardy type inequalities and variational methods.

**Keywords:** Nonlinear elliptic equation, Hardy potentials, singular solutions, regularity of solutions, symmetry of solutions.

## Resumo

Nesta dissertação estudamos o problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta u + u|u|^{p-1} + V(x)u + f(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0, \text{ quando } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

sujeito a restrições  $n \geq 3$  e  $p > \frac{n}{n-2}$ , cobrindo os casos sub-críticos, críticos e super-críticos. Obtemos boa-colocação de soluções, regularidade, simetrias de soluções e comportamento assintótico em espaços singulares  $H_k$ . Empregamos um argumento de ponto fixo em  $H_k$  e  $E_k$  ao invés de usar desigualdades do tipo Hardy e métodos variacionais.

**Palavras-chave:** Equação Elíptica, Potencial de Hardy, Solução Singular, Regularidade, Simetrias.



# Conteúdo

<b>Dedicatória</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Espaço de Schwartz . . . . .	5
2.2 Espaços de Sobolev . . . . .	10
2.2.1 Imersões de Sobolev . . . . .	13
2.3 Espaços de funções $H_k$ e $E_k$ . . . . .	14
2.4 Problema de Poisson e Regularidade . . . . .	16
2.5 Lema Abstrato . . . . .	19
<b>3 Boa-colocação e regularidade</b>	<b>21</b>
3.1 Noções de Solução e Espaços Funcionais . . . . .	21
3.2 Boa-Colocação . . . . .	23
3.3 Regularidade . . . . .	24
3.4 Prova dos Teoremas . . . . .	27
<b>4 Positividade, simetrias e auto-similaridade</b>	<b>38</b>
4.1 Auto-similaridade . . . . .	38
4.2 Positividade e simetrias . . . . .	38

<i>CONTEÚDO</i>	x
4.3 Prova dos Teoremas . . . . .	40
<b>5 Comportamento assintótico das soluções</b>	<b>44</b>
5.1 Prova do Teorema . . . . .	45
<b>Referências</b>	<b>49</b>

*Aos meus pais.*  
*Para minha esposa e filho.*

# Agradecimentos

- A Deus pela força para prosseguir no caminho do conhecimento, sendo este muitas vezes árduo.
- Aos meus orientadores e amigos Professores Éder Mateus de Souza e Marcelo Fernandes de Almeida pela paciência e sabedoria para me conduzir nesta jornada.
- A toda minha família em especial aos meus pais Lourivaldo e Maria por tudo que sempre representam para mim, a minha esposa Thais e meu filho Breno por estarem juntos a mim vivendo cada dificuldade desta caminhada e a minha tia Maria que foi a primeira que acreditou na minha vida acadêmica, sem ela com certeza o rumo seria outro.
- Agradeço ao DMA pelo acolhimento, de onde levo ótimas lembranças em especial dos Professores Zaqueu e Fábio que foram muito importantes também nesta jornada.
- Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de EDPs elípticas com potenciais singulares do tipo Hardy tem sido o foco de estudo de muitos pesquisadores da área (ver [5], [8], [12], [19]). Para equações elípticas, um caso bastante interessante são as EDPs com potenciais multipolares anisotrópicos da forma

$$V(x) = \sum_{l=1}^k \frac{h_l \left( \frac{x-x_l}{|x-x_l|} \right)}{|x-x_l|^\sigma} \quad (1.0.1)$$

onde  $l = 1, \dots, k$ ,  $h_l \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ ,  $x_l \in \mathbb{R}^n$  e o parâmetro  $\sigma$  é a ordem dos polos  $x_1, \dots, x_k$ . Quando  $k = 1$ , o potencial  $V$  é dito *monopolar anisotrópico* e se  $k > 1$ , o potencial  $V$  é dito *multipolar anisotrópico*. No que diz respeito a isotropia, o potencial definido em (1.0.1) é chamado de *isotrópico* se as funções  $h_l$  são constantes, ou seja, independem das direções  $\frac{x-x_l}{|x-x_l|}$ .

Nos trabalhos ([8],[19]) os autores empregam a desigualdade de Hardy e métodos variacionais para resolver problemas do tipo,

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u + u^{\frac{2n}{n-2}}, & x \in \mathbb{R}^n \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ e } u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (1.0.2)$$

o qual se reduz a decidir se a forma quadrática abaixo

$$Q_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx \quad (1.0.3)$$

é não-negativa. De fato, usando a Desigualdade de Hardy

$$\frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (1.0.4)$$

temos que  $Q_\lambda(u)$  é uma forma quadrática não-negativa quando  $\lambda \leq (n-2)^2/4$ , pois

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq 0. \end{aligned}$$

Isto impõe naturalmente a restrição  $0 \leq \lambda \leq \frac{(n-2)^2}{4}$  e, além disso, as imersões de Sobolev (ver (2.2.14)) sugerem as restrições  $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$  e  $\nabla u \in L^2$ .

Nesta dissertação estamos interessados em estudar o problema

$$\begin{cases} \Delta u + u|u|^{p-1} + V(x)u + f(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0, & \text{quando } |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.0.5)$$

no espaço de Banach

$$H_k = \{u \text{ mensurável} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |u(x)| < \infty\} \quad (1.0.6)$$

sujeito as restrições  $n \geq 3$  e  $p > \frac{n}{n-2}$ . Aqui o termo de força  $f$  e o potencial  $V$  podem ser singulares na origem, mudar de sinal ou ter decaimento infinito. Dizemos que uma função  $f$  é singular na origem, se  $|f(x)| \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow 0$ .

Uma motivação no estudo do problema (1.0.5) consiste em considerar o termo de força  $f$  não-nulo. Quando  $V = 0$ , Bernard [5] mostrou a existência de soluções  $u$  positiva, limitada e suave, quando  $f \geq 0$ ,  $f \in C^{k,\alpha}$  e

$$f(x) \leq C_0 \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{p}{p-1}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde

$$C_0 = (p-1) \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left[ \frac{np - n - 2p}{(p-1)^2} \right]^{\frac{p}{p-1}}.$$

E mostrou não-existência de soluções suaves, limitadas e positiva, se

$$|x|^{\frac{2p}{p-1}} f(x) \geq C$$

para alguma constante  $C > C_0$  (ver Observação 3.7) e  $|x|$  suficientemente grande. A abordagem desenvolvida nesta dissertação, baseada no trabalho [13], nos permite supor  $V \neq 0$  e considerar  $f$  em um contexto mais geral do que o tratado em [5].

Resolvemos o problema (1.0.5) com uma técnica de ponto fixo aplicada ao operador integral (3.1.9) definido no espaço  $H_{\frac{2}{p-1}}$ . Via uma análise de “scaling” é natural supor  $V \in H_2$  e o termo de força  $f \in H_{\frac{2p}{p-1}}$ . Neste caso, podemos supor que  $f$  muda de sinal, pode não ser radial, pode ser ilimitada superior e inferiormente, e além disso,  $f \notin L^r$ . De fato, no Teorema 3.1 (ver Cap.3) obtemos a existência de *soluções brandas*  $u \in H_{\frac{2}{p-1}}$ , sujeito as restrições  $n \geq 3$  e  $p > \frac{n}{n-2}$ . Note que os casos sub-crítico, crítico e super-crítico foram todos tratados neste teorema, quando

$$\|V\|_{H_2} < \frac{1}{L_d} = \frac{2(np - n - 2p)}{(p-1)^2} \quad \text{e} \quad \|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \frac{\epsilon}{L_d} \quad (1.0.7)$$

para  $0 < \epsilon < \epsilon_\tau$  suficientemente pequeno. No caso do potencial  $V$  ser nulo em (1.0.7), obtemos que  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  e consequentemente (ver Observação 3.7),

$$\|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} \left[ \frac{np - n - 2p}{(p-1)^2} \right]^{\frac{p}{p-1}} \leq C_0$$

e, parcialmente, estes resultados cobrem o caso de existência em [5]. Por exemplo, no caso crítico  $p = \frac{n+2}{n-2}$  as restrições (1.0.7) têm a forma

$$\|V\|_{H_2} < \frac{1}{L_d} = \frac{(n-2)^2}{4} \quad \text{e} \quad \|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \epsilon \frac{(n-2)^2}{4} \quad (1.0.8)$$

que são exatamente as restrições obtidas em [1, 9, 10, 19] via técnicas variacionais para o problema (1.0.5) no caso crítico com potencial monopolar anisotrópico  $V(x) = h(\frac{x}{|x|})|x|^{-2}$ ,  $h \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$  tal que,

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} |h(x)| < \frac{(n-2)^2}{4}. \quad (1.0.9)$$

Mais detalhes sobre as constantes, ver Observação 3.7 no Capítulo 3.

Usando uma versão particular do Teorema de Regularidade Elíptica, mostramos que a solução  $u \in H_{\frac{2}{p-1}}$  obtida no Teorema 3.1 têm regularidade do tipo  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Além disso, se a força  $f$  e o potencial  $V$  são mais regulares a solução é regular na origem, ver Teorema 3.4 e Teorema 3.5 que trata a regularidade em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente.

Supondo certo grau de homogeneidade em  $f$  e  $V$ , formalmente, temos que  $u_\gamma(x) = \gamma^{\frac{2}{p-1}} u(\gamma x)$  é solução de (1.0.5) se  $u$  for solução. Dizemos que a solução  $u$  é *auto-similar*, se

$$u(x) = \gamma^{\frac{2}{p-1}} u(\gamma x). \quad (1.0.10)$$

Note que  $H_{\frac{2}{p-1}}$  é o espaço natural para estudar este tipo de soluções (ver (3.1.7)). De fato, supondo que  $f$  tem homogeneidade  $\frac{2p}{p-1}$  e  $V$  é um potencial do tipo Hardy  $\left(V(x) = \frac{h(\bar{x})}{|x|^2}\right)$ , via um argumento de iteração mostramos a existência de soluções auto-similares nestes espaços. Estas soluções, além de possuírem uma singularidade não removível na origem, não pertencem a nenhum espaço de Lebesgue  $L^r$  (ver Observação 4.2). Assumindo certos aspectos qualitativos, como simetria radial e não-radial, na força  $f$  e no potencial  $V$  obtemos existência de soluções radiais ou não-radiais (ver Teorema 4.3). Além disso, no Teorema 4.4 e Observação 4.5 obtemos algumas simetrias que são mais gerais que as do Teorema 4.3.

Um outro fato interessante que merece destaque é que o autor de [19, Proposição 2.1] mostra que não existe solução positiva  $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$-\Delta u - \frac{\lambda}{|x|^2} u \geq 0 \quad (1.0.11)$$

onde  $\Omega$  é uma vizinhança de  $x = 0$  e  $\lambda \geq \frac{(n-2)^2}{4}$ . Por outro lado, quando  $0 < \lambda < \frac{(n-2)^2}{4}$  e  $\frac{n}{n-2} < p \leq \frac{n+2}{n-2}$ , o Teorema 4.1 e o Teorema 4.3(A) garantem a existência de solução positiva  $u \notin W_{loc}^{1,2}(\Omega)$  para o problema (1.0.5).

No Capítulo 5, obtemos estimativas de decaimento (ver Teorema 5.1) e o comportamento assintótico das soluções quando é permitido certas perturbações em  $f$  e  $V$ .



# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo definimos conceitos básicos que aparecem ao longo do texto. Começamos definindo a transformada de Fourier no espaço  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e o conceito de espaços de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Introduzimos na sequência, o espaço das distribuições temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  para em seguida provar o Lema 2.6 que aparece naturalmente em nossas estimativas do próximo Capítulo. Na seção seguinte munimos o espaço  $C_c^\infty(\Omega)$  com uma noção de convergência para definir o espaço das funções testes  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Ao fim da seção enunciamos uma imersão de Sobolev. Na sequência definimos os espaços de Banach  $H_k$  e  $E_k$  e descrevemos certas propriedades. Para finalizar o capítulo, tratamos do problema clássico de Poisson e enunciamos resultados de regularidade. Por fim, provamos um Lema abstrato que usaremos para obter a existência de solução em  $H_k$ .

### 2.1 Espaço de Schwartz

Um *multi-índice* é uma  $n$ -úpla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$  e  $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$  denota a norma do multi-índice. Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , escrevemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \quad (2.1.1)$$

Geralmente iremos usar a abreviação  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ , para derivadas em  $\mathbb{R}^n$ . E para derivadas de ordem maior escreveremos,

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (2.1.2)$$

Agora seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Denotaremos por  $C^k(\Omega)$  o espaço de funções  $u$  com derivadas contínuas,  $\partial^\alpha u$ , em  $\Omega$  até a ordem  $1 \leq |\alpha| \leq k$ . E

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega). \quad (2.1.3)$$

O espaço de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , é o espaço de todas funções  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  as quais, junto com todas as suas derivadas decaem mais rápido que qualquer potência de  $x$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Mais precisamente

**Definição 2.1.** Dizemos que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty. \quad (2.1.4)$$

A coleção  $\{p_{\alpha,\beta}\}$  é uma família enumerável de seminormas em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que define uma topologia em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  metrizável caracterizada da seguinte forma: uma sequência  $\{\phi_k\}$  converge para zero em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se, e somente se, para todo multi-índice  $\alpha, \beta$  temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{\alpha,\beta}(\phi_k) = 0. \quad (2.1.5)$$

Com esta topologia, o Espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é um Espaço de Fréchet, ver [14, Teorema 8.2]. Além disso,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , para  $1 \leq p < \infty$  (ver [14, Teorema 8.17]). Note que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ , desta forma a Transformada de Fourier tem sentido no espaço de Schwartz.

**Definição 2.2.** Seja  $f$  uma função em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . A Transformada de Fourier de  $f$ , denotada por  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$ , é um operador limitado de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  em  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  definido por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) dx, \quad (2.1.6)$$

onde  $dx$ , denota a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

Algumas propriedades importantes são listadas a seguir.

- a)  $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$  e  $\hat{f}$  é um operador limitado de  $L^1$  em  $L^\infty$ ;
- b)  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$  (Riemann- Lebesgue);
- c)  $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ ;
- d) Se a matriz  $T$  é invertível em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1} \hat{f}((T^{-1})^* \xi)$ ;
- e)  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 2\pi i \xi_i \hat{f}(\xi)$ ;
- f)  $\widehat{(-2\pi i x_j f)}(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$ .

Os detalhes sobre estas propriedades são encontrados em [6, Cap.1] ou [14, Teorema 8.22]. Note que uma fórmula de inversão que nos ajuda a recuperar a função  $f$  a partir da transformada de Fourier  $\hat{f}$  é

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \quad (2.1.7)$$

Porém, esta fórmula pode não fazer sentido no contexto dos espaços  $L^1$ , pois não temos certeza sobre a integrabilidade de  $\hat{f}$ . Por esta razão, introduziremos uma nova classe de espaços onde (2.1.7) faz sentido.

**Teorema 2.3.** A Transformada de Fourier é um operador linear limitado de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* Pelas propriedades e) e f) obtemos

$$\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi) = C(\widehat{\partial^\alpha x^\beta f})(\xi),$$

assim

$$|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi)| \leq C \|\partial^\alpha x^\beta f\|_{L^1}.$$

A norma  $L^1$  pode ser limitada por uma combinação linear finita de seminormas de  $f$  o que conclui que a transformada de Fourier é uma aplicação contínua de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nele mesmo.  $\square$

Usando o Teorema 2.3 e o Teorema da Inversão de Fourier (ver [14, Teorema 8.26]) a Transformada de Fourier é um isomorfismo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De fato, seja  $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \widehat{f}(-x)$  então o Teorema 2.3 garante que o operador  $\mathcal{F}^{-1}$  é limitado em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Agora usando o Teorema da Inversão de Fourier, temos que existe um representante de  $f$  tal que  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = f_0$ .

O espaço dos funcionais lineares contínuos em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , é chamado de espaço das Distribuições Temperadas, que denotaremos por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Por exemplo, seja  $f \in L^1_{loc}$  e  $\int (1 + |x|^N)|f(x)|dx < \infty$  para algum  $N > 0$ , então  $f$  é uma distribuição temperada, pois

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \right| \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{S}}. \quad (2.1.8)$$

A principal razão de introduzir o espaço  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  é a extensão da Transformada de Fourier como um operador de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 2.4.** Seja  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  uma Distribuição Temperada, a transformada de Fourier de  $\hat{T}$  é um operador  $\hat{\cdot} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ e } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.1.9)$$

Seja  $f \in L^p$ , onde  $1 \leq p \leq \infty$ . Podemos identificar  $f$ , como uma Distribuição Temperada da seguinte forma

$$T_f(\phi) = \langle f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f\phi. \quad (2.1.10)$$

A integral acima é finita, segundo a desigualdade de Hölder. Seja  $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$  o delta de Dirac concentrado no origem de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\hat{\delta}_0 = 1$  em  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . De fato,

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle := \hat{\delta}_0(\varphi) = \delta_0(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi \rangle \quad (2.1.11)$$

A seguir definiremos uma função bastante importante e que aparece com frequência no decorrer do nosso trabalho.

**Definição 2.5.** Seja  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(z) > 0$ , a função Gamma de  $z$  é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt. \quad (2.1.12)$$

Uma propriedade fundamental da função Gamma, que generaliza a noção de fatorial, é

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.1.13)$$

Note que a função homogênea  $f(x) = |x|^{\alpha-n}$  é localmente integrável quando  $0 < \alpha < n$ . Mas, em geral, a função  $f$  não é integrável e a transformada de Fourier não pode ser tomada no sentido mais restrito

de sua Definição. Portanto, vamos estender  $f$  para uma distribuição temperada e calcular a transformada de Fourier usando a Definição 2.4. Para isto, lembre que (ver [14])

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g, \text{ se } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (2.1.14)$$

e, dado  $f(x) = e^{-\pi r|x|^2}$ ,  $r > 0$ , temos que

$$\widehat{f}(\xi) = r^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{r}}. \quad (2.1.15)$$

Sejam  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $r > 0$ . Usando (2.1.14) e (2.1.15) obtemos

$$\int e^{-\pi r|x|^2} \widehat{\varphi}(x) dx = \int r^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{r}} \varphi(\xi) d\xi \quad (2.1.16)$$

Seja  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$ , multiplicando (2.1.16) por  $r^{\frac{n-\alpha}{2}-1} dr$  e integrando em  $r$  de 0 a  $\infty$  obtemos

$$\int \left( \int_0^\infty r^{\frac{n-\alpha}{2}-1} e^{-\pi r|x|^2} dr \right) \widehat{\varphi}(x) dx = \int \left( \int_0^\infty r^{-\frac{\alpha}{2}+1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{r}} dr \right) \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.1.17)$$

Seja  $r = \frac{\pi|\xi|^2}{t}$  e note que  $dr = -\pi|\xi|^2 t^{-2} dt$ . Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{-\frac{\alpha}{2}+1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{r}} dr &= \pi^{-\frac{\alpha}{2}} |\xi|^{-\alpha} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}} |\xi|^{-\alpha} \\ &:= c_\alpha |\xi|^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Similarmente, podemos obter

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{\frac{n-\alpha}{2}-1} e^{-\pi r|x|^2} dr &= \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\pi^{\frac{(n-\alpha)}{2}}} |x|^{\alpha-n} \\ &= c_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Inserindo (2.1.18) e (2.1.19) em (2.1.17) e usando a Definição 2.4 obtemos,

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{|x|^{\alpha-n}}, \varphi \right\rangle &= \langle |x|^{\alpha-n}, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \int |x|^{\alpha-n} \widehat{\varphi}(x) dx \\ &= \frac{c_\alpha}{c_{n-\alpha}} \int |\xi|^{-\alpha} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle \frac{c_\alpha}{c_{n-\alpha}} |\xi|^{-\alpha}, \varphi \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

**Lema 2.6** (Lema de Convolução). Sejam  $0 < \alpha < n$ ,  $0 < \beta < n$  tais que  $0 < \alpha + \beta < n$ . Então,

$$(|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{\alpha-n} |y - z|^{\beta-n} dz = C(\alpha, \beta, n) |y|^{\alpha+\beta-n}, \quad (2.1.21)$$

onde  $C(\alpha, \beta, n) = (c_\alpha c_\beta c_{n-\alpha-\beta}) / (c_{\alpha+\beta} c_{n-\alpha} c_{n-\beta})$ .

*Demonstração.* Usando (2.1.20) e a propriedade *c*) obtemos

$$\langle (|x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n})^\wedge(\xi), \varphi \rangle = \left\langle \frac{c_\alpha c_\beta}{c_{n-\alpha} c_{n-\beta}} |\xi|^{-(\alpha+\beta)}, \varphi \right\rangle. \quad (2.1.22)$$

Portanto, aplicando a transformada inversa em ambos os lados de (2.1.22), usando a Definição 2.4 e usando a igualdade (2.1.20) (no caso, para a Transformada de Fourier inversa), segue que

$$\langle |x|^{\alpha-n} * |x|^{\beta-n}, \varphi \rangle = \left\langle \frac{c_\alpha c_\beta c_{n-\alpha-\beta}}{c_{n-\alpha} c_{n-\beta} c_{\alpha+\beta}} |y|^{\alpha+\beta-n}, \varphi \right\rangle.$$

□

## 2.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção representaremos por  $C_c^\infty(\Omega)$  o espaço vetorial das funções definidas em  $\Omega$ , com suporte compacto, possuindo em  $\Omega$  derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Denominaremos os elementos deste espaço de *funções testes em  $\Omega$* .

**Definição 2.7.** Denominaremos de *espaço das funções testes em  $\Omega$*  e representaremos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  o espaço  $C_c^\infty(\Omega)$  munido da seguinte noção de convergência:

Dada uma sequência  $\{\varphi_k\}_k$  em  $C_0^\infty(\Omega)$ ;

- (a) Os suportes de todas as funções testes  $\varphi_k$  da sequência dada estão contidas num compacto fixo  $K$ .
- (b) Para cada  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , a sequência  $\{D^\alpha \varphi_k\}$  converge para zero uniformemente em  $K$ .

(c) Seja  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Dizemos que a sequência  $\{\varphi_k\}$  de elementos de  $C_c^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_c^\infty(\Omega)$ , se a sequência  $\{\varphi_k - \varphi\}$  converge para zero no sentido dado acima.

Uma *Distribuição*  $T$  é um funcional linear e contínuo na topologia de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Dizemos que  $T$  é contínuo em  $\mathcal{D}(\Omega)$  se dada uma sequência  $\{\varphi_k\}$  convergente para zero, temos que a sequência  $\{\langle T, \varphi_k \rangle\}$  converge para zero em  $\mathbb{R}$ .

O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  é um espaço vetorial, representamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  chamado o *espaço dual topológico* de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Neste espaço vetorial dizemos que uma sequência  $\{T_k\}$  de vetores em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  converge para zero em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , se  $\{\langle T_k, \varphi \rangle\}$  converge para zero,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . No que diz respeito a distribuição,  $L_{loc}^1(\Omega)$  é um espaço muito importante. Seja  $f$  uma função em  $L_{loc}^1$ . Para cada  $\phi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$  faz sentido considerar

$$T_f(\phi) = \langle f, \phi \rangle := \int_{\Omega} f \phi dx, \quad (2.2.1)$$

que claramente define um funcional linear em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Além disso,  $T_f$  é também uma função contínua. De fato, dada  $(\phi_k)$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$|T_f(\phi) - T_f(\phi_k)| = \left| \int_{\Omega} (\phi(x) - \phi_k(x)) f(x) dx \right| \quad (2.2.2)$$

$$\leq \sup_{x \in K} |\phi(x) - \phi_k(x)| \int_K |f(x)| dx, \quad (2.2.3)$$

que tende a zero pela convergência uniforme das  $\phi_k$ 's. Assim  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Se uma distribuição  $T$  é dada por (2.2.1), onde  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ , dizemos que a distribuição  $T$  é uma função  $f$ . O teorema abaixo justifica esta identificação.

**Teorema 2.8.** Sejam  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f, g \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Suponha que

$$\int_{\Omega} f \phi = \int_{\Omega} g \phi, \quad (2.2.4)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Então  $f(x) = g(x)$ , para quase todo ponto  $x \in \Omega$ .

O Teorema 2.8 nos diz que, dado  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  temos que  $T_f$  é univocamente determinada por  $f$  q.t.p em  $\Omega$ . Por esta razão, podemos identificar  $f$  pela distribuição  $T_f$  e chamaremos a distribuição  $f$  tendo em mente a identificação (2.2.1). É interessante notar que existem distribuições não definidas por funções de  $L_{loc}^1(\Omega)$ . Basta considerar  $x_0 \in \Omega$  e  $\delta_{x_0}$  o funcional linear definido em  $\mathcal{D}(\Omega)$  por,

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2.5)$$

É fácil verificar que o delta de Dirac  $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . No entanto, a distribuição de Dirac não é definida por uma função em  $L^1_{loc}(\Omega)$ . De fato, se existisse uma tal função  $u$ , então

$$\int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \phi(x) dx = (\|x - x_0\|^2 \phi(x))|_{x=x_0} = 0 \quad (2.2.6)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Usando o Teorema 2.8, temos que  $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ , q.t.p em  $\Omega$ , isto é,  $u(x) = 0$  quase todo ponto em  $\Omega$  e, conseqüentemente,  $\delta_{x_0} = 0$  uma contradição.

Agora, definiremos a noção de *derivada fraca*. Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Defina o funcional linear  $\partial^\alpha T$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$  dado por:

$$(\partial^\alpha T)(\phi) = \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \quad (2.2.7)$$

A notação  $\nabla T$  é chamada de *distribuição gradiente de  $T$* , denotando a  $n$ -upla  $(\partial_1 T, \partial_2 T, \dots, \partial_n T)$ .

Vale a pena ressaltar que a derivada fraca de uma função de  $L^1_{loc}(\Omega)$ , não é, em geral uma função de  $L^1_{loc}(\Omega)$ . De fato, considere a função de Heaviside,

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Claramente  $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , mas a derivada fraca  $H' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Com efeito,

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \quad (2.2.9)$$

Este fato nos motiva a definir um espaço de funções cuja a derivada fraca delas ainda sejam integráveis, a saber, os espaços de Sobolev. Vimos que as funções em  $L^1_{loc}(\Omega)$  são uma classe importante de distribuições. Podemos refinar esta classe estudando as funções cuja primeira derivada no sentido de distribuição esteja em  $L^1_{loc}$ . Esta classe é denotada por  $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ . Além disso, podemos proceder em  $L^p_{loc}(\Omega)$  como em  $L^1_{loc}(\Omega)$  e com isso definir a classe das funções  $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$  para cada  $1 \leq p \leq \infty$ . Assim,

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega) := \{f, \partial_i f \in L^p_{loc} | \partial_i f \text{ é uma distribuição em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ para } i = 1, \dots, n\}. \quad (2.2.10)$$



Podemos definir  $W^{1,p}(\Omega)$  como

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f, \partial_i f \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n\} \quad (2.2.11)$$

Os espaços  $W^{1,p}(\Omega)$  e  $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  são chamados de *Espaços de Sobolev*. O espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  munido da norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.12)$$

é um espaço de Banach. Definições similares, se aplicam para os espaços de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  e  $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$  com  $m \in \mathbb{N}$ . Uma notação particular é atribuída quando  $p = 2$ , denotamos  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ .

### 2.2.1 Imersões de Sobolev

Nesta subsecção, vamos lembrar algumas imersões de Sobolev em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e uma desigualdade do tipo Hardy. Iniciaremos com uma imersão clássica

**Teorema 2.9.** Suponha que  $1 \leq p < n$  e seja

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \text{ e } C_0 = \frac{(n-1)p}{n-p}. \quad (2.2.13)$$

Então, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tem-se:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^n \|\partial_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.2.14)$$

Em particular, quando  $p = 2$  tem-se que  $q = \frac{2n}{n-2}$  e consequentemente,

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{n-1}{n} \frac{2}{n-2} \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.2.15)$$

Quando  $p = \infty$ , temos que  $W^{1,\infty}$  está imerso em espaços de Hölder, quando  $n \geq 1$ . Primeiro relembre da noção de espaços do tipo Hölder.

**Definição 2.10.** Seja  $f$  uma função definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Sejam  $y \in \Omega$ , e  $0 < \alpha \leq 1$ . Dizemos que  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$  pertence ao espaço de Hölder, denotado por  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ , se

$$\sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty. \quad (2.2.16)$$

Denotaremos por  $C_{loc}^{k,\alpha}(\Omega)$  o conjunto das funções localmente do tipo Hölder, se (2.2.16) é válida para todo subconjunto compacto  $x, y \in K \subset \Omega$  e  $x \neq y$ .

**Teorema 2.11.** Seja  $n \geq 1$  e  $m \in \mathbb{N}$ , então

$$W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n), \text{ imerso continuamente} \quad (2.2.17)$$

onde  $C^{k,\alpha}$  denota o espaço de Hölder.

Para detalhes sobre estes resultados veja [14] Seção 9.3.

## 2.3 Espaços de funções $H_k$ e $E_k$

Nesta seção, definiremos espaços vetoriais normados bem particulares que desempenham um papel chave ao longo deste trabalho.

Seja  $u$  uma função mensurável em  $\mathbb{R}^n$  defina  $H_k$ ,  $k \geq 0$ , como o conjunto das funções  $u$  tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |u(x)| < \infty \quad (2.3.1)$$

e definimos  $E_k$  como o conjunto das funções  $u \in H_k$  tais que

$$\sup (1 + |x|^k) |u(x)| < \infty. \quad (2.3.2)$$

Estes conjuntos têm uma estrutura de espaço vetorial onde,

$$\|u\|_{H_k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |u(x)| \quad (2.3.3)$$

e

$$\|u\|_{E_k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k) |u(x)|,$$

definem normas. Note que a norma definida em (2.3.3) é invariante por simetrias. De fato, seja  $\mathcal{G}$  um subconjunto do grupo das matrizes ortogonais  $\mathcal{O}(n)$  de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $u$  uma função sob a ação de  $\mathcal{G}$  assim

dada  $T \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
 \|u(Tx)\|_{H_k} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Tx|^k |u(Tx)| \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |u(x)| \\
 &= \|u\|_{H_k}.
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Além disso, note que

$$\|u(\lambda \cdot)\|_{H_k} = \lambda^{-k} \|u\|_{H_k}. \tag{2.3.5}$$

**Proposição 2.12.**  $H_k$  e  $E_k$  munidos de suas respectivas normas são espaços de Banach.

*Demonstração.* Para demonstrar o fato vamos utilizar [14, Teorema 5.1]. Assim se  $(u_n)$  é uma série absolutamente convergente em  $H_k$ , basta provar que  $u_n$  é convergente em  $H_k$

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\|_{H_k} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right| \\
 &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{n=1}^{\infty} |x|^k |u_n| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(x)\|_{H_k} < \infty.
 \end{aligned}$$

Logo  $(u_n)$  é convergente e podemos concluir que  $H_k$  é um espaço de Banach. Analogamente mostra-se que  $E_k$  é um espaço de Banach.  $\square$

**Lema 2.13.** Seja  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  de tal forma que  $f_n \rightarrow f$  e  $g_n \rightarrow g$  q.t.p  $x \in \Omega$ . Se  $g_n \in L^1(\Omega)$ ,  $|f_n| \leq g_n \in L^1(\Omega)$  q.t.p  $x \in \Omega$  e  $\int_{\Omega} g_n \rightarrow \int_{\Omega} g$  então  $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$ .

*Demonstração.* Note que  $g_n + f_n \geq 0$  e  $g_n - f_n \geq 0$  quase todo ponto. Aplique o Lema de Fatou para obter

$$\int_{\Omega} g + \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} (g_n + f_n) = \liminf \int_{\Omega} g_n + \liminf \int_{\Omega} f_n = \int_{\Omega} g + \liminf \int_{\Omega} g_n$$

e

$$\int_{\Omega} g - \int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} (g_n - f_n) = \liminf \int_{\Omega} g_n - \liminf \int_{\Omega} f_n = \int_{\Omega} g - \limsup \int_{\Omega} g_n$$

Portanto,  $\limsup \int_{\Omega} f_n \leq \int_{\Omega} f \leq \liminf \int_{\Omega} f_n$  e segue o resultado.  $\square$

## 2.4 Problema de Poisson e Regularidade

A seguir o problema clássico de Poisson além de alguns Teoremas de Regularidade que utilizaremos ao longo do texto.

A equação de Poisson é definida por

$$-\Delta u = f, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i} \quad (2.4.1)$$

onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é desconhecida, sendo  $U$  um conjunto aberto dado. A função

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{\frac{2-n}{2}}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

definida para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , é a solução fundamental da equação de Laplace  $\Delta u = 0$ , onde  $\omega_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ . Note que  $\Phi(x) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$  e  $n > 2$ . A noção de solução fundamental do laplaciano pode ser definida de modo mais rigoroso. Mais precisamente, uma solução fundamental para o operador de Laplace, é uma distribuição  $K$  pertencente a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$-\Delta K = \delta_0. \quad (2.4.3)$$

Suponha  $f \in C_c^\infty$ , então  $u = K * f$  é bem definido e formalmente obtemos,

$$-\Delta u = \Delta K * f = \delta_0 * f = f. \quad (2.4.4)$$

O laplaciano de  $u$  tem propriedades importantes, como pode ser evidenciado no seguinte Teorema.

**Teorema 2.14.** Suponha que  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  tem suporte compacto e seja  $u$  a convolução de  $\Phi$  com  $f$ , isto é,

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy, \quad (2.4.5)$$

conhecido como potencial newtoniano gerado por  $f$ . Então,

(i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii)  $-\Delta u = f$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 2.15.** Note que  $u(x) \rightarrow 0$ , quando  $|x| \rightarrow \infty$  e  $n > 2$ .

*Demonstração.* Escreva,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x - y)dy$$

assim

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[ \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right] dy,$$

onde  $h \neq 0$  e  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , assim

$$u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i}(x - y)dy \quad (i = 1, \dots, n).$$

Analogamente, obtemos

$$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i x_j}(x - y)dy \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.4.6)$$

Como as expressões do lado direito são contínuas na variável  $x$  então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Em particular por (2.4.6),

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta_x f(x - y)dy. \quad (2.4.7)$$

Como  $\Phi$  tem uma singularidade na origem vamos isolar ela em uma pequena bola. Para isto, fixe  $\epsilon > 0$  e escreva

$$\Delta u(x) = \int_{B(0, \epsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x - y)dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \epsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x - y)dy := I_\epsilon + J_\epsilon.$$

Não é difícil ver que

$$|I_\epsilon| \leq \begin{cases} C\epsilon^2 |\log \epsilon|, & \text{se } n = 2, \\ C\epsilon^2, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Para estimar  $J_\epsilon$  usamos integração por partes, assim,

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \epsilon)} D\Phi(y) D_y f(x - y) dy \\ &\quad + \int_{\partial B(0, \epsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x - y) dS(y) \\ &:= K_\epsilon + L_\epsilon. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Note que

$$|L_\epsilon| \leq \begin{cases} C\epsilon |\log \epsilon|, & \text{se } n = 2, \\ C\epsilon, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

e

$$K_\epsilon = -\frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \epsilon)} f(x - y) dS(y)$$

Usando o Teorema do Valor Médio para Integrais temos

$$K_\epsilon = - \int_{\partial B(x, \epsilon)} f(y) dS(y) \rightarrow -f(x), \quad \text{se } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por fim, pelo que foi construído acima quando  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que,

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

□

O Teorema 2.14 pode ser provado com uma exigência muito menor de regularidade para a função  $f$ .

**Lema 2.16.** Seja  $f$  limitada e localmente Hölder contínua em  $\Omega$ , e seja  $u$  o potencial Newtoniano de  $f$ . Então  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta u = f$  em  $\Omega$ .

A seguir uma versão particular do Teorema de Regularidade Elíptica, a versão geral pode ser vista em [7].

**Lema 2.17.** Suponha que  $u \in W_{loc}^{1,\infty}$  satisfaz

$$\Delta u = f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Se  $f \in L_{loc}^\infty$ , então  $u \in W_{loc}^{1,2}$ .

## 2.5 Lema Abstrato

A seguir um Lema chave para o desenvolvimento do nosso trabalho.

**Lema 2.18.** Seja  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço de Banach,  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação linear contínua com norma  $\|T\| \leq \tau < 1$ ,  $\rho > 0$  e  $B : X \rightarrow X$  uma aplicação que satisfaz  $B(0) = 0$  e

$$\|B(x) - B(z)\|_X \leq K\|x - z\|_X(\|x\|_X^{\rho-1} + \|z\|_X^{\rho-1}) \quad \forall x, z \in X. \quad (2.5.1)$$

Seja  $\epsilon > 0$  satisfazendo  $\frac{2^\rho K}{(1-\tau)^{\rho-1}}\epsilon^{\rho-1} + \tau < 1$ . Se  $\|y\|_X \leq \epsilon$ , então existe uma única solução  $x$  para a equação  $x = y + B(x) + T(x)$  tal que  $\|x\|_X \leq \frac{2\epsilon}{1-\tau}$ .

*Demonstração.* Defina a aplicação  $H : X \rightarrow X$  por  $H(x) = y + T(x) + B(x)$ . Agora considere o conjunto  $A_\epsilon = \{x \in X : \|x\|_X \leq \frac{2\epsilon}{1-\tau}\}$  assim se  $x \in A_\epsilon$  temos

$$\begin{aligned} \|H(x)\|_X &\leq \|y\|_X + \|T(x)\|_X + \|B(x)\|_X \\ &\leq \|y\|_X + \tau\|x\|_X + K\|x\|_X^\rho \\ &\leq \epsilon + \frac{2\epsilon}{1-\tau}\tau + \frac{2^\rho\epsilon^\rho}{(1-\tau)^\rho}K \\ &\leq \left(1 + \tau + \frac{2^\rho\epsilon^\rho}{(1-\tau)^{\rho-1}}K\right) \frac{\epsilon}{1-\tau}, \end{aligned}$$

mas  $\left(1 + \tau + \frac{2^\rho\epsilon^\rho}{(1-\tau)^{\rho-1}}K\right) < 2$ , logo

$$\|H(x)\|_X \leq \left(1 + \tau + \frac{2^\rho\epsilon^\rho}{(1-\tau)^{\rho-1}}K\right) \frac{\epsilon}{1-\tau} < \frac{2\epsilon}{1-\tau}$$

podemos concluir que  $H(A_\epsilon) \subset A_\epsilon$ . Agora observe que  $H$  é uma contração em  $A_\epsilon$ . De fato, seja  $x, z \in A_\epsilon$  assim

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(z)\|_X &\leq \|T(x) - T(z)\|_X + \|B(x) - B(z)\|_X \\ &\leq (\tau + K(\|x\|_X^{\rho-1} \|z\|_X^{\rho-1})) \|x - z\|_X \\ &\leq \left( \tau + \frac{2^\rho K \epsilon^{\rho-1}}{(1-\tau)^{\rho-1}} \right) \|x - z\|_X \end{aligned}$$

como  $\tau + \frac{2^\rho K \epsilon^{\rho-1}}{(1-\tau)^{\rho-1}} < 1$  segue que  $H$  é uma contração em  $A_\epsilon$ . Aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach a  $H$  temos que existe um único  $x \in A_\epsilon$  que é solução da equação  $x = y + B(x) + T(x)$ .  $\square$



# Capítulo 3

## Boa-colocação e regularidade

Neste capítulo é apresentada a teoria que garante a existência para o problema (1.0.5), em seguida obteremos resultados de boa-colocação e regularidade.

### 3.1 Noções de Solução e Espaços Funcionais

Antes de definirmos a noção de solução branda para o problema (1.0.5), faremos uma análise na escala da equação (1.0.5) que nos motivará a escolha adequada dos espaços funcionais que trabalharemos. Para isto, suponha que  $u$  é uma solução clássica de (1.0.5) e defina

$$u_\lambda(x) = \lambda^a u(\lambda x), \quad \lambda > 0 \quad (3.1.1)$$

e sejam  $V$  e  $f$  funções homogêneas tais que

$$V(\lambda x) = \lambda^{-l} V(x) \text{ e } f(\lambda x) = \lambda^{-b} f(x) \text{ para todo } l > 0, b > 0.$$

Entao,

$$\Delta u_\lambda + u_\lambda |u_\lambda|^{p-1} + V(x)u_\lambda + f(x) = \lambda^{a+2} \Delta u + \lambda^{a+(p-1)a} u |u|^{p-1} + \lambda^{a+l} V(x)u + \lambda b f(x) = 0 \quad (3.1.2)$$

se, e somente se,

$$a + 2 = a + (p - 1)a = a + l = b. \quad (3.1.3)$$

Portanto

$$l = 2, \quad a = \frac{2}{p-1}, \quad b = \frac{2p}{p-1}, \quad (3.1.4)$$

ou seja, assumindo que  $V$  é homogênea de grau  $-2$  e  $f$  homogênea de grau  $-\frac{2p}{p-1}$ , temos que  $u_\lambda(x)$  é uma solução clássica de (1.0.5). A mudança de escala (3.1.1) induz um mapa de soluções, a saber, o mapa  $M_\gamma$  que associa  $u$  a  $u_\gamma$ ,

$$M_\gamma : u \mapsto u_\gamma. \quad (3.1.5)$$

Dizemos que uma solução para o problema (1.0.5) é *auto-similar*, se

$$u = M_\gamma(u) = u_\gamma, \forall \gamma > 0. \quad (3.1.6)$$

Note que  $H_k$  é invariante por (3.1.6) se, e somente se  $k = \frac{2}{p-1}$ . De fato, usando (2.3.5) temos,

$$\|u_\gamma\|_{H_k} = \gamma^{\frac{2}{p-1}-k} \|u\|_{H_k} = \|u\|_{H_k} \quad (3.1.7)$$

se, e somente se,  $k = \frac{2}{p-1}$ . Isto é um dos motivos de nosso estudo de (1.0.5) no espaço de funções  $H_{\frac{2}{p-1}}$ .

Seja  $n \geq 3$ , fazendo

$$\begin{cases} -\Delta u = g \text{ em } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow 0, \text{ quando } |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.1.8)$$

onde  $g = u|u|^{p-1} + V(x)u + f(x)$ . A equação (3.1.8) pode ser vista como a equação (2.4.1), dessa forma  $u$  tem a seguinte formulação

$$u(x) = B(u) + T_V(u) + F(f), \quad (3.1.9)$$

onde

$$F(f) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y) dy, \quad B(u) = F(u|u|^{p-1}) \text{ e } T_V(u) = F(Vu), \quad (3.1.10)$$

e  $\omega_n$  denota a área da esfera unitária. A partir deste momento, diremos que uma função mensurável  $u \in H_{\frac{2}{p-1}}$  é uma *solução branda* para o problema (1.0.5), se  $u$  satisfaz a equação integral (3.1.9). Note que a solução branda é uma solução de (1.0.5) no sentido de distribuição. De fato, pela definição de

derivada fraca temos que

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u, \varphi \rangle &= \langle u, -\Delta \varphi \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy, -\Delta \varphi \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \left\langle \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, -\Delta \varphi \right\rangle \right) (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \delta_y, \varphi \rangle (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) (u|u|^{p-1} + Vu + f)(y) dy \\
&= \langle u|u|^{p-1} + Vu + f, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

para todo  $\varphi \in C_c^\infty$ .

## 3.2 Boa-Colocação

A partir de agora, assumiremos que  $n \geq 3$  e  $p > \frac{n}{n-2}$ . Na sequência apresentaremos nosso teorema de existência.

**Teorema 3.1.** Seja  $C(\alpha, \beta, n)$  como no Lema 2.6. Para cada  $d$  e  $\tau$ , defina  $L_d = \frac{1}{(n-2)\omega_n} C(2, n-2-d, n)$  e  $\epsilon_\tau = \frac{(1-\tau)^{\frac{p}{p-1}}}{(2^p p L_d)^{\frac{1}{p-1}}}$ . Suponha que  $f \in H_{\frac{2p}{p-1}}$  e  $V \in H_2$ .

(i) Se  $\tau = L_d \|V\|_{H_2}$ ,  $d = \frac{2}{p-1}$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_\tau$ ,  $\|V\|_{H_2} < \frac{1}{L_d}$  e  $\|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \frac{\epsilon}{L_d}$ , teremos que a equação integral (3.1.9) terá uma única solução  $u \in H_{\frac{2}{p-1}} \leq \frac{2\epsilon}{1-\tau}$ .

(ii) Seja  $0 < a < n-2$  e assumamos que  $\|V\|_{H_2} < \frac{1}{L_a}$  e  $f \in H_{a+2} \cap H_{\frac{2p}{p-1}}$ . Existe  $0 < \delta_a \leq \epsilon$  tal que se  $\|f\|_{H_{2pp-1}} \leq \frac{\delta_a}{L_a}$ , então  $u \in H_a$ .

**Observação 3.2.** Note que o Teorema acima pode ser adaptado para tratar uma equação da forma

$$\Delta u + V(x)u + K(x)u + f(x) = 0. \quad (3.2.1)$$

Basta supor  $p > \frac{n-b}{n-2}$  e  $n - (n-2)p < b < 2p$ , se  $V \in H_2$ ,  $K \in H_b$  e  $f \in H_{\frac{2p-b}{p-1}}$  desta forma temos uma solução em  $H_{\frac{2-b}{p-1}}$ . De fato, observe que para mostrar isto teremos que obter estimativas como as obtidas

em (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12) e por fim seguir como na parte (i) do Teorema 3.1. A seguir obteremos apenas uma versão da estimativa (3.4.10), visto que as outras são uma consequência desta.

$$\begin{aligned}
\|K(x)(|u|^{p-1} - |v|^{p-1})\|_{H_{d+2}} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |y|^{d+2} |K(x)| |u|^{p-1} - |v|^{p-1}| \\
&\leq p \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \underbrace{(|y|^b |K(x)|)}_{\|K\|_{H_b}} \underbrace{|y|^d |u - v|}_{\|u - v\|_{H_2}} \underbrace{|y|^{2-b} (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})}_{\|u\|_{H_{\frac{2-b}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{H_{\frac{2-b}{p-1}}}^{p-1}} \\
&= p \|K(x)\|_{H_b} \|u - v\|_{H_2} (\|u\|_{H_{\frac{2-b}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{H_{\frac{2-b}{p-1}}}^{p-1}). \quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

O caso especial  $b = 0$  e  $K \in L^\infty$  é exatamente o item (i) do Teorema 3.1.

A solução obtida no Teorema 3.1 depende continuamente de  $f$  e  $V$ , como provaremos no

**Teorema 3.3.** Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções de (1.0.5), respectivamente, associada aos dados  $f_1, V_1, \tau_1, \epsilon_1$  e  $f_2, V_2, \tau_2, \epsilon_2$  como na parte (i) do Teorema 3.1, seja  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon < \epsilon_\tau$ , com  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ . Então,

$$\|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{L_{\frac{2}{p-1}}}{1 - \tau - \frac{2^p p L_{\frac{2}{p-1}}}{(1-\tau)^{p-1}} \epsilon^{p-1}} \left( \|f_1 - f_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \frac{2\epsilon}{1 - \tau} \|V_1 - V_2\|_{H_2} \right). \quad (3.2.3)$$

### 3.3 Regularidade

Nesta seção mostraremos que uma solução branda do problema (1.0.5) é, de fato, uma solução clássica quando  $f$  e  $V$  têm mais regularidade.

**Teorema 3.4.** Seja  $u$  solução obtida no Teorema 3.1 (i). Então

- (i)  $\nabla u \in H_{\frac{p+1}{p-1}}, u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e  $u$  é solução de (1.0.5) no sentido de distribuição.
- (ii)  $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e satisfaz (1.0.5) q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (iii) Se  $f, V \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , então  $\Delta u \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e  $u$  satisfaz (1.0.5) para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
- (iv) Se  $f, V$  forem localmente Hölder contínuas em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  então,  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Supondo que  $f$  e  $V$  não tem possibilidade de ter singularidades na origem, a solução  $u$  não é singular em 0 e obtemos que  $u$  é solução clássica de (1.0.5).

**Teorema 3.5.** Sob as hipóteses do Teorema 3.1, existem constantes positivas  $\tilde{\epsilon}_*$  e  $\tilde{\tau}_*$  tal que se  $\|f\|_{E_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \tilde{\epsilon}_*$  e  $\|V\|_{E_2} \leq \tilde{\tau}_*$ , em seguida,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^{\frac{2}{p-1}}) |u| < \infty,$$

e  $u \in E_a$  para todo  $0 \leq a \leq \frac{2}{p-1}$ . Além disso,

(i)  $\nabla u \in E_{\frac{p+1}{p-1}}$  e  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

(ii)  $f, V \in C(\mathbb{R}^n)$ , então  $\Delta u \in C(\mathbb{R}^n)$  e  $u$  satisfaz (1.0.5) para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

(iii) Se  $f, V$  forem localmente Hölder contínuas em  $\mathbb{R}^n$  então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,

**Observação 3.6.** A taxa de decaimento  $0 \leq a \leq \frac{2}{p-1}$  da solução obtida no Teorema 3.5, pode ser estendida para  $\frac{2}{p-1} < a < n - 2$ . De fato, se  $f \in E_{a+2}$ , suponha que  $\|f\|_{E_{a+2}}$  e  $\|V\|_{E_2}$  são suficientemente pequenos, agora basta proceder como no Teorema 3.1, obtendo novas estimativas similares a (3.4.10), (3.4.11) e (3.4.12). Em seguida usando o Lema 2.18 com  $X = E_{a+2}$  e (3.4.25) no lugar de (3.4.1) obteremos o decaimento desejado. Pelos mesmo motivos da observação 3.2 obteremos apenas uma versão da estimativa (3.4.10).

$$\begin{aligned} \| |u|^{p-1} - |v|^{p-1} \|_{E_{a+2}} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^{a+2}) |u|^{p-1} - |v|^{p-1}| \\ &\leq p \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^2 + |y|^a + |y|^{a+2}) |u - v| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) \\ &\leq p \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^a) |u - v| (1 + |y|^2) (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) \\ &\leq p \|u - v\|_{E_a} (\|u\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1}). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Assim a solução correspondente  $u$  satisfaz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^a) |u(x)| < \infty. \quad (3.3.2)$$

O decaimento rápido da solução que ocorre quando  $a = n - 2$  pode ser obtido em [13]. Note que este decaimento rápido não pode ser obtido da parte (i) do Teorema 3.1 pois para  $\beta = 0$  no Lema 2.6 a integral (2.1.21) diverge.

**Observação 3.7.** Nos podemos obter uma expressão explícita para a constante  $L_d$  com  $d = \frac{2}{p-1}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 L_d &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} C(2, n-2-d, n) \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{c_2 c_{n-2-d} c_d}{c_{n-d} c_{n-2} c_{d+2}} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \pi^{-1} \pi^{-\frac{(n-2-d)}{2}} \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{n-2-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{n(n-2) \pi^{\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{(n-d)}{2}} \pi^{-\frac{(n-2)}{2}} \pi^{-\frac{(2+d)}{2}} \Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+d}{2}\right)} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{n-2-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{n(n-2) \Gamma\left(\frac{n-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+d}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Usando  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  temos,

$$\begin{aligned}
 L_d &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n-d-2}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{n(n-2) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \left(\frac{n-2}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{(n-d-2)d} \\
 &= \frac{(p-1)^2}{2(np-n-2p)}.
 \end{aligned}$$

Note que o Teorema 3.1 com  $V \equiv 0$ , devemos tomar  $\tau = 0$ . Assim para  $d = \frac{2}{p-1}$ , a constante líder para existência de solução no Teorema 3.1 deve ser  $\frac{\epsilon_0}{L_d}$ , onde  $\epsilon_\tau = \frac{(1-\tau)^{\frac{p}{p-1}}}{(2^p p L_d)^{\frac{1}{p-1}}}$ . Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon_0}{L_d} &= \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{(2L_d)^{\frac{p}{p-1}}} \\
 &= \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}}} \left[ \frac{np-n-2p}{(p-1)^2} \right]^{\frac{p}{p-1}}.
 \end{aligned}$$

Note que  $\frac{\epsilon_0}{L_d} \leq C_0$  (ver Introdução). Além disso, se  $p = \frac{n+2}{n-2}$ , então  $d = \frac{n-2}{2}$  e  $\frac{1}{L_d} = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ .

**Observação 3.8.** Seja  $\tilde{\epsilon}_* \leq \frac{\epsilon_0}{L_d}$ , onde

$$\tilde{\epsilon}_* = \frac{\epsilon_*}{N_{\frac{2}{p-1}}}$$

e  $\epsilon_*$  é tal que

$$\frac{2^p \epsilon_*^{p-1}}{(1-\tau_*)^{p-1}} p N_{\frac{2}{p-1}} + \tau_* < 1. \quad (3.3.3)$$

Desta forma, se  $\tilde{\epsilon}_* \leq \frac{\epsilon_0}{L_d}$ , as hipóteses do Teorema 3.5 garante a existência e regularidade de soluções para o problema (1.0.5). De fato, observe que é suficiente provar  $\epsilon_* \leq \epsilon_0$ , pois

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_* &= \frac{\epsilon_*}{N_{\frac{2}{p-1}}} \\ &= \frac{\epsilon_*}{M_{\frac{2}{p-1}} + L_{\frac{2}{p-1}}} \\ &\leq \frac{\epsilon_*}{L_{\frac{2}{p-1}}}.\end{aligned}$$

Sendo assim, usando (3.3.3) com  $V = 0$  ( $\tau_* = 0$ ) temos

$$2^p \epsilon_*^{p-1} p N_{\frac{2}{p-1}} < 1$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\epsilon_* &< \frac{1}{(2^p p N_{\frac{2}{p-1}})^{\frac{1}{p-1}}} \\ &\leq \frac{1}{(2^p p L_{\frac{2}{p-1}})^{\frac{1}{p-1}}} \\ &= \epsilon_0.\end{aligned}$$

O fato de  $\tilde{\epsilon}_* \leq C_0$  é esperado, caso contrário o Teorema 3.5 nos daria uma solução regular contradizendo os resultados de não existência de [3] e [5].

### 3.4 Prova dos Teoremas

Antes de prosseguirmos provaremos um Lema chave para o desenvolvimento desta seção.

**Lema 3.9.** Seja  $0 < d < n - 2$ ,  $n > 2$  e  $L_d = \frac{1}{(n-2)\omega_n} C(2, n - 2 - d, n)$  como definido no Teorema 3.1, então

$$\|F(g)\|_{H_d} \leq L_d \|g\|_{H_{d+2}}, \quad (3.4.1)$$

para toda  $g$  mensurável. Além disso,

i)  $F(g) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , se  $g \in H_{d+2}$ .

ii)  $\nabla F(g) \in H_{d+1}$ , se  $g \in H_{d+2}$ .

*Demonstração.* Relembre que,

$$F(g) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} g(y) dy,$$

e estime

$$\begin{aligned} |F(g)| &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |g(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{d+2}} |y|^{d+2} |g(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{d+2}} dy \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (|y|^{d+2} |g(y)|) \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{d+2}} dy \|g\|_{H_{d+2}}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Usando o Lema 2.6 com  $\alpha = 2$  e  $\beta = n - (d+2)$  obtemos

$$\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{d+2}} dy = \frac{1}{(n-2)\omega_n} C(2, n-2-d, n) = L_d \frac{1}{|x|^d} \quad (3.4.3)$$

inserindo (3.4.3) em (3.4.2), concluímos

$$|F(g)| \leq L_d \frac{1}{|x|^d} \|g\|_{H_{d+2}},$$

que é a estimativa (3.4.1).

**Prova (i):** Para provar (i), suponha que  $g \in H_{d+2}$  e seja  $x \neq 0$  e  $z \in \mathbb{S}^{n-1}$  fixado. Observe que

$$\frac{F(g)(x+tz) - F(g)(x)}{t} = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\frac{1}{|x+tz-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}}}{t} \right) g(y) dy.$$

Pelo teorema do valor médio, para cada  $t \in (0, 1)$ , existe  $\bar{t} \in (0, t)$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{F(g)(x+tz) - F(g)(x)}{t} &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla \left( \frac{1}{|x+tz-y|^{n-2}} \right) \cdot t\bar{z} \right) g(y) dy \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z \cdot (x-y+\bar{t}z)}{|x-y+\bar{t}z|^n} g(y) dy \\ &:= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} H(\bar{t}, y) dy. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$



Note que,

$$\begin{aligned}
 |H(\bar{t}, y)| &= \left| \frac{z \cdot (x - y + \bar{t}z)}{|x - y + \bar{t}z|^n} \cdot g(y) \right| \\
 &= \frac{1}{|x - y + \bar{t}z|^{n-1}} |g(y)| \\
 &\leq \frac{1}{|x - y + \bar{t}z|^{n-1}} \cdot \frac{1}{|y|^{d+2}} \cdot \|g\|_{d+2} \\
 &:= G(\bar{t}, y).
 \end{aligned}$$

Note que a função  $G(\bar{t}, z) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . De fato, usando o Lema 2.6 com  $\alpha = 1$  e  $\beta = n - (d + 2)$ , temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{t}, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y + \bar{t}z|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{d+2}} \|g\|_{d+2} dy \\
 &= \frac{C(1, n - 2 - d)}{|x + \bar{t}z|^{d+1}} \|g\|_{H_{d+2}}.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $t \rightarrow 0^+$ , temos que  $\bar{t} \rightarrow 0^+$  o Teorema da Convergência Dominada nos dá

$$\begin{aligned}
 \frac{C(1, n - 2 - d)}{|x|^{d+1}} \|g\|_{H_{d+2}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{d+2}} \|g\|_{d+2} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} G(0, y) dy.
 \end{aligned}$$

Assim concluimos que,

- $G(\bar{t}, y) \rightarrow G(0, y)$  e  $\int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{t}, y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} G(0, y) dy$ , quando  $\bar{t} \rightarrow 0^+$ .
- $|H(\bar{t}, y)| \leq G(\bar{t}, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Usando o Lema 2.13 temos,

$$\begin{aligned}
 D_z F(g)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(g)(x + tz) - F(g)(x)}{t} \\
 &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z \cdot (x - y)}{|x - y|^n} g(y) dy.
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Seja  $z = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então  $D_z = \partial_{x_i}$  e

$$\nabla F(g)(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x - y}{|x - y|^n} g(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{3.4.6}$$

Por outro lado, para  $x_0 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\nabla F(g)(x) - \nabla F(g)(x_0) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{(x_0-y)}{|x_0-y|^n} \right) g(y) dy \\ &:= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{H}(x, y) dy.\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

Note que,

$$\begin{aligned}|\tilde{H}(x, y)| &\leq \frac{|g(y)|}{|x-y|^{n-1}} + \frac{|g(y)|}{|x_0-y|^{n-1}} \\ &= \frac{|y|^{d+2}|g(y)|}{|x-y|^{n-1}|y|^{d+2}} + \frac{|y|^{d+2}|g(y)|}{|x_0-y|^{n-1}|y|^{d+2}} \\ &\leq \frac{\|g\|_{H_{d+2}}}{|x-y|^{n-1}|y|^{d+2}} + \frac{\|g\|_{H_{d+2}}}{|x_0-y|^{n-1}|y|^{d+2}} \\ &:= \tilde{G}(x, y).\end{aligned}$$

A função  $\tilde{G}(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . De fato, pelo Lema 2.6,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(x, y) dy = C(1, n-2-d, n) \|g\|_{H_{d+2}} \left( \frac{1}{|x|^{d+1}} + \frac{1}{|x_0|^{d+1}} \right)\tag{3.4.8}$$

fazendo  $x \rightarrow x_0$  em (3.4.8),

$$C(1, n-2-d, n) \|g\|_{H_{d+2}} \frac{2}{|x_0|^{d+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(x, y) dy$$

onde concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$C(1, n-2-d, n) \|g\|_{H_{d+2}} \frac{2}{|x_0|^{d+1}} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(x_0, y) dy.$$

Agora fazendo  $x \rightarrow x_0$  em (3.4.7) e usando o fato de  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{H}(x, y) = 0$ , para todo  $y \neq x$ , podemos usar o Lema 2.13 para obter  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\nabla F(g)(x) - \nabla F(g)(x_0)) = 0$  e concluir que  $\frac{\partial}{\partial x_i} F(g) \in C(\mathbb{R}^n - \{0\})$  assim  $F(g) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**Prova (ii):** Basta usar (3.4.6) e proceder como na prova da desigualdade (3.4.1) usando o Lema 2.6 com

$\alpha = 1$  e  $\beta = n - 2 - d$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 |\nabla F(g)(x)| &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |g(y)| dy \\
 &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{d+2}} |y|^{d+2} |g(y)| dy \\
 &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{|y|^{d+2}} dy \|g\|_{H_{d+2}} \\
 &\leq \frac{1}{\omega_n} C(1, n-2-d, n) \frac{1}{|y|^{d+1}} \|g\|_{H_{d+2}},
 \end{aligned}$$

isto é,  $\nabla F(g) \in H_{d+1}$ . □

**Prova do Teorema 3.1.** Prova do item (i). Relembre a desigualdade

$$|b|b|^{p-1} - a|a|^{p-1}| \leq p|b-a|(|b|^{p-1} + |a|^{p-1}), \quad p > 1, \quad (3.4.9)$$

e observe que

$$\begin{aligned}
 \| |u|u|^{p-1} - |v|v|^{p-1} \|_{H_{d+2}} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (|y|^{d+2} |u|u|^{p-1} - |v|v|^{p-1}|) \\
 &\leq p \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (|y|^d |u-v| |y|^2 (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})) \\
 &= p \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (|y|^d |u-v| (|y|^{\frac{2}{p-1}} |u|)^{p-1} + (|y|^{\frac{2}{p-1}} |v|)^{p-1}) \\
 &\leq p \|u-v\|_{H_d} \left( \|u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right). \quad (3.4.10)
 \end{aligned}$$

Seja  $g = (|u|u|^{p-1} - |v|v|^{p-1})$ ,  $B(u) - B(v) = F(g)$ . Usando o Lema 3.9, com  $d = \frac{2}{p-1}$  e  $g = (|u|u|^{p-1} - |v|v|^{p-1})$ , em seguida usando a desigualdade (3.4.10) podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \|B(u) - B(v)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &= \|F(g)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &\leq L_{\frac{2}{p-1}} \|g\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \\
 &= L_{\frac{2}{p-1}} \| |u|u|^{p-1} - |v|v|^{p-1} \|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \\
 &\leq p L_{\frac{2}{p-1}} \|u-v\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \left( \|u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right). \quad (3.4.11)
 \end{aligned}$$

Agora vamos obter a estimativa para o operador linear  $T_V$ . Visto que  $T_V(u) = F(Vu)$  pelo Lema 3.9, com  $d = \frac{2}{p-1}$  e  $g = V(u - v)$ , estimamos

$$\begin{aligned}
 \|T_V(u) - T_V(v)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &= \|T_V(u - v)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &= \|F(V(u - v))\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &\leq L_{\frac{2}{p-1}} \|V(u - v)\|_{\frac{2p}{p-1}} \\
 &\leq L_{\frac{2}{p-1}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left( |y|^{\frac{2}{p-1}} |y|^2 |V(x)| |u - v| \right) \\
 &\leq L_{\frac{2}{p-1}} \|V\|_{H_2} \|u - v\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}.
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Queremos aplicar o Lema 2.18, a equação integral (3.1.9) no espaço de Banach  $X = H_{\frac{2}{p-1}}$ . Para isto seja  $y = F(f)$ ,  $T(x) := T_V(u)$  e

$$B(x) := B(u). \tag{3.4.13}$$

Note que  $B$  como definida na equação (3.4.13) satisfaz  $B(0) = 0$  e por (3.4.11) satisfaz também a estimativa (2.5.1) do Lema 2.18 quando  $X = H_{\frac{2}{p-1}}$  e  $K = pL_{\frac{2}{p-1}}$ . Agora tome  $g = f$  em (3.4.1) para obter

$$\|y\|_X = \|F(f)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq L_{\frac{2}{p-1}} \|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \epsilon, \tag{3.4.14}$$

pois, por hipótese  $\|f\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \frac{\epsilon}{L_{\frac{2}{p-1}}}$ . Tomando  $v = 0$  em (3.4.12) temos que

$$\|T_V(u)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq L_{\frac{2}{p-1}} \|V\|_{H_2} \|u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}.$$

Isto é,  $T_V$  é um operador linear e contínuo em  $H_{\frac{2}{p-1}}$ . Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que

$$\frac{2^p L_{\frac{2}{p-1}}}{(1 - \tau)^{p-1}} \epsilon^{p-1} + \tau < 1,$$

o Lema 2.18 garante que existe uma *solução branda*  $u$  para (1.0.5) tal que  $\|u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{2\epsilon}{1-\tau}$ .

**Prova (ii):** Como a solução  $u$  obtida do Teorema 3.1 (i), foi via um argumento de ponto fixo, então pode ser visto como o limite da sequência,

$$u_1 = F(f) \text{ e } u_{m+1} = F(f) + B(u_m) + T_V(u_m) \tag{3.4.15}$$

Considere a sequência  $\{w_m\}_{m \geq 2}$  definida por  $w_{m+1} = u_{m+1} - u_m$ . Usando o Lema 3.9 com  $d = a$  obtemos

$$\|F(f)\|_{H_a} \leq L_a \|f\|_{H_{a+2}}. \quad (3.4.16)$$

Agora pelas estimativas (3.4.11), (3.4.12)

$$\begin{aligned} \|w_{m+1}\|_{H_a} &= \|u_{m+1} - u_m\|_{H_a} \\ &\leq \|B(u_m) - B(u_{m-1})\|_{H_a} + \|T_V(u_m) - T_V(u_{m-1})\|_{H_a} \\ &\leq pL_a \|u_m - u_{m-1}\|_{H_a} \left( \|u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|u_{m-1}\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right) + L_a \|V\|_{H_2} \|u_m - u_{m-1}\|_{H_a} \\ &\leq pL_a \|w_m\|_{H_a} \left( \|u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|u_{m-1}\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right) + L_a \|V\|_{H_2} \|w_m\|_{H_a}. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Seja  $\tau_a = L_a \|V\|_{H_2} < 1$  e escolha  $0 < \delta_a \leq \epsilon$  tal que  $\frac{2^p \delta_a^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} pL_a + \tau_a < 1$  e  $\|f\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{\delta_a}{L_d}$ . Como  $\delta_a \leq \epsilon$ , a prova de (i) mostrou que a sequência (3.4.15) está na bola fechada  $B_{\frac{2\delta_a}{1-\tau}}$ , isto é,

$\|u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{2\delta_a}{1-\tau}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Assim a estimativa (3.4.17) implica em

$$\|w_{m+1}\|_{H_a} = \left( \frac{2^p \delta_a^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} pL_a + \tau_a \right) \|w_m\|_{H_a}. \quad (3.4.18)$$

Mas  $\frac{2^p \delta_a^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} pL_a + \tau_a < 1$ , logo a sequência  $\{u_m\}$  é uma contração em  $H_a$ . Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach  $u_m \rightarrow \tilde{u} \in H_a$  isto é,  $\langle u_m - \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u_m - u, \phi \rangle$  para toda  $\phi \in C_0^\infty$ , assim  $u = \tilde{u}$  em  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova do Teorema 3.3.** Inicialmente note que  $\frac{2^p K}{(1-\tau)^{p-1}} \epsilon^{p-1} + \tau < 1$ , onde  $K = pL_{\frac{2}{p-1}}$ , de fato,

$$\epsilon < \epsilon_\tau = \frac{(1-\tau)^{\frac{p}{p-1}}}{(2^p K)^{\frac{1}{p-1}}}$$

desta forma,

$$\epsilon^{p-1} < \frac{(1-\tau)^p}{2^p K}$$

por fim,

$$\frac{2^p K}{(1-\tau)^{p-1}} \epsilon^{p-1} + \tau < 1.$$

Subtraímos as equações integrais satisfazendo  $u_1$  e  $u_2$  e utilizamos (3.4.11), (3.4.12), (3.4.14), para obter

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &= \|F(f_1) + B(u_1) + V(u_1) - (F(f_1) + B(u_1) + V(u_1))\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&= \|B(u_1) - B(u_2) + V_1(u_1 - u_2) + (V_1 - V_2)u_2 + F(f_1 - f_2)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&\leq \|B(u_1) - B(u_2)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|V_1(u_1 - u_2)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&\quad + \|(V_1 - V_2)u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|F(f_1 - f_2)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}},
\end{aligned}$$

Usando as estimativas (3.4.11), (3.4.12), (3.4.14) e o Lema 3.9 obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &\leq pL_{\frac{2}{p-1}} \|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \left( \|u_1\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right) \\
&\quad + L_{\frac{2}{p-1}} \|V\|_{H_2} \|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + L_{\frac{2}{p-1}} \|u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \|V_1 - V_2\|_{H_2} \\
&\quad + L_{\frac{2}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{H_{\frac{2p}{p-1}}} \\
&= \left( pL_{\frac{2}{p-1}} \left( \|u_1\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right) + L_{\frac{2}{p-1}} \|V_1\|_{H_2} \right) \|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&\quad + L_{\frac{2}{p-1}} \|u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \|V_1 - V_2\|_{H_2} + L_{\frac{2}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}.
\end{aligned}$$

usando as hipóteses de  $\|u_i\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{2\epsilon}{1-\tau_i}$  para  $i = 1, 2$  e  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &\leq \left( pL_{\frac{2}{p-1}} \left( \frac{2^{p-1}\epsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} + \frac{2^{p-1}\epsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} \right) + \tau \right) \|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&\quad + L_{\frac{2}{p-1}} \frac{2\epsilon}{1-\tau} \|V_1 - V_2\|_{H_2} + L_{\frac{2}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&= \left( \frac{2^p\epsilon^{p-1}}{(1-\tau)^{p-1}} + \tau \right) \|u_1 - u_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
&\quad + L_{\frac{2}{p-1}} \frac{2\epsilon}{1-\tau} \|V_1 - V_2\|_{H_2} + L_{\frac{2}{p-1}} \|f_1 - f_2\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}, \tag{3.4.19}
\end{aligned}$$

que é equivalente à (3.2.3).

### Prova do Teorema 3.4.

**Prova (i):** Note que se  $u|u|^{p-1}$ ,  $Vu$  e  $f \in H_{\frac{2p}{p-1}}$ , a última afirmação do Lema 3.9 com  $d = \frac{2}{p-1}$ , garante

$$u = F(u|u|^{p-1} + Vu + f) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{3.4.20}$$

e

$$\nabla u = \nabla(u|u|^{p-1} + Vu + f) \in H_{\frac{p+1}{p-1}}. \tag{3.4.21}$$

**Prova (ii):** Observe que pelo item (i)  $u \in C_{loc}^1(\Omega) \subset W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$  e  $(u|u|^{p-1} + Vu + f) \in H_{\frac{2p}{p-1}} \subset L^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  aberto. Como  $u$  é solução no sentido de distribuição usamos o Lema 2.17 e concluímos que  $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^n - \{0\})$  e  $u$  verifica (1.0.5) q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Prova (iii):** Suponha que  $f, V \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , uma vez que pelo item (ii)  $u$  satisfaz a equação (1.0.5) q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ , teremos  $\Delta u = u|u|^{p-1} + Vu + f \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e (1.0.5) satisfeita para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Finalmente para o item (iv), uma vez provado que  $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Se  $f, V \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  então  $u|u|^{p-1} + Vu + f \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e o Lema 2.16 garante que  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**Prova do Teorema 3.5.** Primeiro observe que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \frac{1}{1 + |x-y|^{d+2}} dy < \infty \quad (3.4.22)$$

para  $0 < d < \infty$  e  $0 < \alpha < n$ . Usando (3.4.22) estimamos

$$\begin{aligned} |F(g)| &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |g(y)| dy \right) \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{1}{1 + |x-y|^{d+2}} dy (1 + |x-y|^{d+2}) |g(x-y)| \right) \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{1}{1 + |x-y|^{d+2}} dy \right) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^{d+2} |g(x)|) \\ &= M_d \|g\|_{E_{d+2}}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Assumindo  $0 < d < n-2$ , pelo Lema 3.9 temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^d |F(g)| \leq L_d \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{d+2} |g(x)|. \quad (3.4.24)$$

Combinando (3.4.24) com (3.4.23), temos

$$\|F(g)\|_{E_d} \leq N_d \|g\|_{E_{d+2}} \quad \text{onde } N_d = M_d + L_d. \quad (3.4.25)$$

Seja  $\epsilon_* > 0$  e  $\tau_* = N_{\frac{2}{p-1}} \|V\|_{E_2} < 1$  tal que  $\frac{2^p \epsilon_*^{p-1}}{(1-\tau_*)^{p-1}} p N_{\frac{2}{p-1}} + \tau_* < 1$ . Tomando  $\|f\|_{E_{\frac{2p}{p-1}}} \leq \frac{\epsilon_*}{N_{\frac{2}{p-1}}} = \tilde{\epsilon}_*$ ,  $\|V\|_{E_2} \leq \frac{\tau_*}{N_{\frac{2}{p-1}}} = \tilde{\tau}_*$ . Procedendo exatamente como na prova do Teorema 3.1, usando  $X = E_{\frac{2}{p-1}}$  e (3.4.25), ao invés de  $X = H_{\frac{2}{p-1}}$  e (3.4.1), e obtemos as seguintes estimativas

$$\|u|u|^{p-1} - v|v|^{p-1}\|_{E_{\frac{2p}{p-1}}} \leq p \|u - v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}} \left( \|u\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right)$$

$$\|B(u) - B(v)\|_{E_{\frac{2}{p-1}}} \leq pN_{\frac{2}{p-1}} \|u - v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}} \left( \|u\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} + \|v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}^{p-1} \right)$$

$$\|T_V(u) - T_V(v)\|_{E_{\frac{2}{p-1}}} \leq N_{\frac{2}{p-1}} \|V\|_{E_2} \|u - v\|_{E_{\frac{2}{p-1}}}$$

e em seguida a solução de (3.1.9) tal que  $\|\tilde{u}\|_{E_{\frac{2}{p-1}}} \leq \frac{2\epsilon_*}{1-\tau_*}$ . Como na prova do Teorema 3.1 podemos definir a sequência  $\{w_m\}_{m \geq 2}$  dada por  $w_m = u_{m+1} - u_m$  com  $u_m$  definida pela equação (3.4) assim a sequência  $\{u_m\}$  converge para  $\tilde{u}$  em  $E_{\frac{2}{p-1}}$  em particular  $\tilde{u}$  converge em  $H_{\frac{2}{p-1}}$ . Pela prova do Teorema 3.1  $u_m \rightarrow u$  em  $H_{\frac{2}{p-1}}$ , assim pela unicidade do limite  $\tilde{u} = u \in E_{\frac{2}{p-1}}$ . Por inclusão contínua  $E_a \subset E_{\frac{2}{p-1}}$  e obtemos  $u \in E_a$  para todo  $0 \leq a \leq \frac{2}{p-1}$ .

**Prova (i):** Seja  $g = u|u|^{p-1} + Vu + f$ , afim de mostrar que  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  é suficiente provar que  $F(g) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  visto que  $g \in E_{\frac{2p}{p-1}}$ . Usando o Lema 3.9, já temos que  $F(g) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Nos resta mostrar que a derivada de  $F(g)$  existe em  $x = 0$ . Para isto fixe  $d = \frac{2}{p-1}$  e seja  $|z| = 1$ . Usando o Teorema do Valor Médio, para cada  $t \in (0, 1)$  existe  $\bar{t} \in (0, t)$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{F(g)(tz) - F(g)(0)}{t} &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{|tz-y|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}} \right) g(y) dy \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z \cdot (\bar{t}z - y)}{|\bar{t}z - y|^n} g(y) dy \\ &:= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} H(\bar{t}, y) dy. \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} |H(\bar{t}, y)| &= \frac{|g(y)|}{|\bar{t}z - y|^{n-1}} \\ &\leq \frac{\|g\|_{E_{d+2}}}{|\bar{t}z - y|^{n-1}(1 + |y|^{d+2})} \\ &:= G(\bar{t}, y) \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{t}, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(\bar{t}, y) dy$$



onde,  $\tilde{G}(\bar{t}, y)$  é definida por,

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\bar{t}, y) &:= \frac{\|g\|_{E_{d+2}}}{|y|^{n-1}(1 + |\bar{t}z - y|^{d+2})} \\ &\leq \frac{\|g\|_{E_{d+2}}}{|y|^{n-1}(2 + |y|^{d+2})} \in L^1(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\bar{t}, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(\bar{t}, y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}(0, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(0, y) dy, \text{ quando } t \rightarrow 0^+ \quad (3.4.27)$$

onde

$$\tilde{G}(0, y) = G(0, y) = \frac{\|g\|_{E_{d+2}}}{|y|^{n-1}(1 + |y|^{d+2})}. \quad (3.4.28)$$

Em vista que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(\bar{t}, y) = \frac{z \cdot (-y)}{|y|^n}$ , uma aplicação do Lema 2.13 resulta em

$$D_z F(g)(0) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{zy}{|y|^n} g(y) dy, \quad \forall |z| = 1, \quad (3.4.29)$$

e

$$\nabla F(g)(0) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{|y|^n} g(y) dy. \quad (3.4.30)$$

A continuidade de  $\nabla F(g)$  em  $x = 0$  segue de (3.4.30) e dos argumentos acima. Finalmente,

$\nabla F(g) \in C(\mathbb{R}^n)$ , desta maneira  $\nabla F(g) \in E_{\frac{p+1}{p-1}}$  e concluímos (i).

**Prova (ii):** Seja  $V, f$  e  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ . Usando o Teorema 3.4 segue que

$$-\Delta u = |u|^{p-1} + Vu + f = g, \quad q.t.p \text{ em } x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.4.31)$$

assim  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ , dessa forma podemos concluir que (3.4.31) é verificada para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Prova (iii):** Se  $f, V \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ , então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , similarmente a prova da regularidade da  $u$  em  $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  feita no Teorema 3.4.

# Capítulo 4

## Positividade, simetrias e auto-similaridade

Neste capítulo detalharemos certas propriedades qualitativas das soluções brandas, como simetria radial, positividade e auto-similaridade de soluções. Antes de enunciarmos nossos teoremas, relembremos uma definição. Dizemos que uma solução  $u$  para a equação (1.0.5) é *auto-similar*, se

$$u(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x), \quad \lambda > 0.$$

### 4.1 Auto-similaridade

**Teorema 4.1.** Assuma as hipóteses do Teorema 3.1, e suponha que  $f$  e  $V$  são homogêneas de grau  $-\frac{2p}{p-1}$  e  $-2$ , respectivamente. Então a solução  $u$  é uma solução auto-similar, isto é,

$$u(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\lambda > 0$ .

**Observação 4.2.** Note que existe função homogênea  $u \in H_{\frac{2}{p-1}}$  e  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{x_i\})$ , a saber,  $u(x) = \frac{C}{|x-x_i|^{\frac{2}{p-1}}}$ . No entanto,  $u \notin L^r(1 \leq r \leq \infty)$ ,  $u \notin C(\mathbb{R}^n)$ .

### 4.2 Positividade e simetrias

Seja  $\mathcal{O}(n)$  o grupo das rotações. Dizemos que uma função  $u$  é invariante por rotações (ou radial) se  $u(Tx) = u(x)$  para toda rotação  $T \in \mathcal{O}(n)$ .

**Teorema 4.3.**

- (A) Se  $V, f \geq 0$  e  $f \neq 0$  q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $u$  é positiva.
- (B) Se  $V \geq 0, f \leq 0$  e  $f \neq 0$  q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $u$  é negativa.
- (C) Se  $f$  e  $V$  são radiais, temos que  $u$  é radial.
- (D) Se  $f$  não é radial e  $V$  é radial, temos que  $u$  não é radial.
- (E) Assuma que valem as hipóteses dos itens (A) e (B). Se  $f$  é radial e  $V$  é não radial, temos que  $u$  é não radial.

Outros resultados a respeito de simetria como nos itens (C) e (D) do Teorema 4.1 podem ser provados considerando transformações ortogonais no espaço. Seja  $\mathcal{O}(n)$  o grupo ortogonal de matriz e seja  $\mathcal{G}$  um subconjunto de  $\mathcal{O}(n)$ .

Dizemos que uma função  $h$  é simétrica ou anti-simétrica com relação a ação de  $\mathcal{G}$  em  $O(n, \mathbb{R})$ , respectivamente, se  $h(x) = h(Mx)$  e  $h(x) = -h(Mx)$ , para todo  $M \in \mathcal{G}$ .

**Teorema 4.4.**

- (A) Se  $f, V$  são simétricas, temos que  $u$  é simétrica
- (B) Se  $f$  é anti-simétrica e  $V$  é simétrica, temos que  $u$  é anti-simétrica.

**Observação 4.5.**

- (i) No caso em que  $\mathcal{G} = \mathcal{O}(n)$  o Teorema 4.4 se reduz aos itens (C) e (D) do Teorema 4.3.
- (ii) Seja  $Mx = -x$  a reflexão sob a origem e seja  $I_{\mathbb{R}^n}$  a aplicação identidade. O caso  $\mathcal{G} = \{I_{\mathbb{R}^n}, M\}$  corresponde a paridade das funções, isto é,  $h(x)$  é par ou ímpar se  $h(x) = (-x)$  ou  $h(x) = -h(-x)$ , respectivamente. Assim, pelo Teorema 4.4 temos que a solução  $u$  é par se  $f$  é par e  $V$  é par e a solução  $u$  é ímpar se  $f$  é ímpar e  $V$  é par.

### 4.3 Prova dos Teoremas

**Prova do Teorema 4.1.** Considere  $u_1(x)$  como definida em (3.4), assim

$$u_1(x) = F(f)(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y) dy. \quad (4.3.1)$$

Como por hipótese  $f$  é homogênea de grau  $-\frac{2p}{p-1}$  então,

$$f(\lambda y) = \lambda^{-\frac{2p}{p-1}} f(y).$$

E assim

$$f(y) = \lambda^{\frac{2p}{p-1}} f(\lambda y).$$

Substituindo em (4.3.1) temos,

$$u_1(x) = F(f)(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \lambda^{\frac{2p}{p-1}} f(\lambda y) dy,$$

donde, fazendo uma substituição  $\lambda y = z$  obtemos,

$$\begin{aligned} u_1(x) = F(f)(x) &= \lambda^{-n} \lambda^{\frac{2p}{p-1}} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - \frac{z}{\lambda}|^{n-2}} f(z) dz \\ &= \lambda^{\frac{2}{p-1}} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda x - z|^{n-2}} f(z) dz \\ &= \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_1(\lambda x). \end{aligned}$$

Desta maneira,  $u_1(x)$  é homogênea de grau  $-\frac{2}{p-1}$ . Note que  $u_2(x)$  também é homogênea de grau  $-\frac{2}{p-1}$  desde que  $V(x)$  seja homogênea de grau  $-2$ . De fato,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1 + B(u_1) + T_V(u_1) \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} (f(y) + u_1(y)|u_1(y)|^{p-1} + V(y)u_1(y)) dy \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda x - y|^{n-2}} (f(z) + u_1(z)|u_1(z)|^{p-1} + V(z)u_1(z)) dy \\ &= \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_2(\lambda x). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Agora com um raciocínio análogo, desde que  $V(x)$  seja homogênea de grau  $-2$ , um argumento indutivo mostra que  $u_m = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_m(\lambda x) = (u_m)_\lambda$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Note que se  $u_m \rightarrow u$  com respeito a norma  $\|\cdot\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}$  que é invariante pela escala como mostramos em (3.1.7) então

$$\begin{aligned}
 \|u_\lambda - u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &= \|u_\lambda - (u_m)_\lambda + (u_m)_\lambda - u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &\leq \|u_\lambda - (u_m)_\lambda\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \|u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|(u_m)_\lambda - u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &= \|u - u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \|u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|u_m - u\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &= 2\|u - u_m\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}.
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Logo quando  $m \rightarrow \infty$  em (4.3.3)

$$u(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x) = u_\lambda(x), \quad \forall x \in H_{\frac{2}{p-1}} \text{ e } \lambda > 0.$$

### Prova do Teorema 4.3

**Parte (A):** Observe que  $F(f)$  é positiva, quando  $f(x) \geq 0$  e  $f \neq 0$  q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ . Assim indutivamente  $u_m > 0 \forall m \in \mathbb{N}$  desde que  $V \geq 0$  q.t.p  $x \in \mathbb{R}^n$ . A solução  $u$  que é o limite na norma  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{\frac{2}{p-1}} |\cdot|$ , é uma função não negativa. Desde que  $F(f) > 0$ , então  $u = F(f) + T_V(u) + B(u) > 0$ .

**Parte (B):** segue de um argumento simétrico.

**Parte (C):** Se  $f$  é radial, então  $f$  é invariante por rotações, ou seja dado  $T \in \mathcal{O}(n)$  temos  $f(Ty) = f(y)$ , observe que  $u_1 = F(f)$  também é radial, desde que  $f$  seja. De fato,

$$\begin{aligned}
 u_1(Tx) = F(f)(Tx) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Tx - y|^{n-2}} f(y) dy \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|T(x - T^{-1}y)|^{n-2}} f(y) dy \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - T^{-1}y|^{n-2}} f(y) dy.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $T^{-1}y = z$  obtemos  $|\det T^{-1}| dy = dz$ , como  $T$  é rotação, então  $dy = dz$ ,

$$\begin{aligned}
 u_1(Tx) = F(f)(Tx) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2}} f(Tz) dy \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2}} f(z) dy \\
 &= u_1(x).
 \end{aligned}$$

Note que  $u_2(x)$  também é radial quando  $V$  e  $f$  é radial. De fato, dado  $T \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$  basta fazer uma substituição  $T^{-1}y = z$  para obter

$$\begin{aligned}
 u_2(Tx) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Tx-y|^{n-2}} (f(y) + u_1(y)|u_1(y)|^{p-1} + V(y)u_1(y)) dy \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-z|^{n-2}} (f(Tz) + u_1(Tz)|u_1(Tz)|^{p-1} + V(Tz)u_1(Tz)) dy \\
 &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-z|^{n-2}} (f(z) + u_1(z)|u_1(z)|^{p-1} + V(Tz)u_1(Tz)) dy \\
 &= u_2(x).
 \end{aligned}$$

Assim um argumento indutivo mostra que  $u_m$  é radial para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Observe que se  $u_m \rightarrow u$  em  $H_{\frac{2}{p-1}}$  que é invariante por simetrias como vimos em (2.3.4) então

$$\begin{aligned}
 \|u(Tx) - u(x)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} &\leq \|u(x) - u_m(Tx)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|u_m(Tx) - u(Tx)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &\leq \|u(x) - u_m(x)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} + \|u_m(x) - u(x)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}} \\
 &\leq 2\|u(x) - u_m(x)\|_{H_{\frac{2}{p-1}}}.
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Assim quando  $m \rightarrow \infty$  em (4.3.4)

$$u(x) = u(Tx), \quad \forall x \in H_{\frac{2}{p-1}} \text{ e } T \in \mathcal{SO}(n). \tag{4.3.5}$$

**Parte (D):** Note que se  $u$  e  $V$  são radiais, com os mesmo argumentos do item (C) podemos mostrar que  $T_V = F(Vu)$  e  $B(u) = F(u|u|^{p-1})$  são radiais. Assim  $F(f) = u - T_V(u) - B(u)$  é radial. novamente pelo item (C)  $f$  deve ser radial, o que é absurdo.

**Parte (E):** Assuma as condições de (A), assim  $u$  é positiva. Suponha por absurdo que  $u$  é radial. Assim  $T_V(u) = u - F(f) - B(u)$  é radial e desta maneira  $Vu$  é radial. Se  $u > 0$  então  $V$  é radial, um absurdo. Quando assumimos as condições de (B), o resultado segue de maneira similar.

#### Prova do Teorema 4.4

**Parte (A):** Se  $f$  é simétrica então  $f(Mx) = f(x)$  para todo  $M \in \mathcal{G}$ . Note que  $u_1(x)$  é simétrica desde que  $f$  seja. De fato,

$$\begin{aligned}
u_1(Mx) = F(f)(Mx) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Mx - y|^{n-2}} f(y) dy \\
&= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - M^{-1}y|^{n-2}} f(y) dy \\
&= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2}} f(z) dz \\
&= u_1(x)
\end{aligned}$$

por uma mudança de variável  $y = Mz$ .

Analogamente provamos que  $u_2(x)$  é simétrica. Com efeito,

$$\begin{aligned}
u_2(Mx) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Tx - y|^{n-2}} (f(y) + u_1(y)|u_1(y)|^{p-1} + V(y)u_1(y)) dy \\
&= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - z|^{n-2}} (f(z) + u_1(z)|u_1(z)|^{p-1} + V(Tz)u_1(Tz)) dz \\
&= u_2(x).
\end{aligned}$$

Assim um argumento indutivo mostra que  $u_m$  é simétrica para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Com um raciocínio análogo ao item (C) do Teorema 4.3 e usando (2.3.4) concluímos que  $u$  é simétrica.

# Capítulo 5

## Comportamento assintótico das soluções

Em virtude da definição do espaço  $H_{\frac{2}{p-1}}$ , as soluções obtidas pelo Teorema 3.1 satisfazem naturalmente  $u = O(|x|^{-\frac{2}{p-1}})$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , desde que  $f = O(|x|^{-\frac{2p}{p-1}})$  e  $V = O(|x|^{-2})$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Em seguida vamos ver que certas perturbações de  $f$  e  $V$  são insignificantes para grandes valores de  $|x|$ . Este resultado é uma interessante consequência que refina a propriedade de decaimento de uma solução obtida pelo Teorema 3.1, que é,  $u = o(|x|^{-\frac{2}{p-1}})$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , desde que  $f = o(|x|^{-\frac{2p}{p-1}})$  e  $V = o(|x|^{-2})$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Confirmamos estes comentários abaixo de uma maneira geral.

**Teorema 5.1.** Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções de (3.1.9) obtidas através do Teorema 3.1, com respeito a  $f_1, V_1$  e  $f_2, V_2$  com  $f_i \in H_{\frac{2p}{p-1}} \cap H_{a+2}$ ,  $i = 1, 2$ . Note que  $a + 2 = \frac{2p}{p-1}$  para  $a = \frac{2}{p-1}$ . Se

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{a+2} |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^2 |V_1(x) - V_2(x)| = 0 \quad (5.0.1)$$

então

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^a |u_1(x) - u_2(x)| = 0. \quad (5.0.2)$$

Além disso, se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \text{ e } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^2 |V_1(x) - V_2(x)| = 0 \quad (5.0.3)$$

então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1(x) - u_2(x)| = 0. \quad (5.0.4)$$



Uma outra consequência do Teorema 5.1 é que se  $f$  e  $V$  forem perturbadas por funções homogêneas a correspondente solução perturbada é assintoticamente homogênea.

**Observação 5.2.** Seja  $u_1$  a solução homogênea correspondente as funções homogêneas  $f_1$  e  $V_1$  com graus  $-\frac{2p}{p-1}$  e  $-2$  respectivamente. Defina  $f_2 = f_1 + h$  e  $V_2 = V_1 + g$  tal que  $h, g$  pertencem ao espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e considere a solução  $u_2$  correspondente a  $f_2$  e  $V_2$ . Estamos supondo implicitamente que  $f_1, f_2, V_1$  e  $V_2$  satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1. Desde que  $h = f_2 - f_1$  e  $g = V_2 - V_1$  satisfaçam as equações (5.0.3) com  $a = \frac{2}{p-1}$ , então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{2}{p-1}} |u_1(x) - u_2(x)| = 0.$$

É possível também considerar funções  $h \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^{\frac{2p}{p-1}}}}$  e  $g \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H_2}}$ .

**Observação 5.3.** Para  $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^{\frac{2p}{p-1}}}}$  e  $V \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H_2}}$ , note que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{2p}{p-1}} |f(x)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^2 |V(x)| = 0. \quad (5.0.5)$$

Pelo Teorema 5.1 com  $u_2 \equiv 0$ , a solução  $u$  correspondente a  $f$  e  $V$  em (5.0.5) satisfaz

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{2}{p-1}} |u(x)| = 0.$$

## 5.1 Prova do Teorema

**Lema 5.4.** Seja  $0 < a < n - 2$  e  $L_a = ((n - 2)\omega_n)^{-1} C(2, n - 2 - a, n)$ . Se  $\in H_{a+2}$ , então

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |F(g)(x)| \leq L_a \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |g(x)|, \quad (5.1.1)$$

$$\limsup_{|x| \rightarrow 0} |x|^a |F(g)(x)| \leq L_a \limsup_{|x| \rightarrow 0} |x|^{a+2} |g(x)|. \quad (5.1.2)$$

*Demonstração.* Provaremos apenas a desigualdade (5.1.1) visto que a prova da desigualdade (5.1.2) é análoga, basta trocar  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty}$  por  $\limsup_{|x| \rightarrow 0}$ . Dado  $R > 0$ , para cada  $y \neq 0$  fixo, temos,

$$\sup_{|x| \geq R} |(|x|y|)^{a+2}|g(|x|y)| = \sup_{||x|y| \geq R|y|} |(|x|y|)^{a+2}|g(|x|y)| \quad (5.1.3)$$

$$= \sup_{|z| \geq R|y|} |(z)^{a+2}|g(z)|. \quad (5.1.4)$$

Usando a mudança de variáveis  $y \mapsto |x|y$  estimamos,

$$\begin{aligned} |x|^a |F(g)| &\leq \frac{|x|^a}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |g(y)| dy \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} |x|^{a+n-(n-2)} |y|^{a+2} |g(|x|y)| dy \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} |(|x|y|)^{a+2} |g(|x|y)| dy. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Passando o  $\sup_{|x| \geq R}$  em (5.1.5) e usando (5.1.3) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \geq R} |x|^a |F(g)| &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \sup_{|x| \geq R} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} |(|x|y|)^{a+2} |g(|x|y)| dy \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \sup_{|x| \geq R} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} \sup_{|x| \geq R} |(|x|y|)^{a+2} |g(|x|y)| dy \\ &\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n} \sup_{|x| \geq R} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} \sup_{|z| \geq R|y|} |(z)^{a+2}|g(z)| dy. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Observe que  $\sup_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} = \frac{1}{|1-|y||^{n-2}}$  e  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|1-|y||^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} dy = \infty$ , afim de lhe dar com a estimativa (5.1.6) iremos dividir a integral em duas partes:

$$\sup_{|x| \geq R} \int_{\mathbb{R}^n} H(x, y, R) dy \leq \sup_{|x| \geq R} \int_{|y| \geq \delta} H(x, y, R) dy + \sup_{|x| \geq R} \int_{|y| < \delta} H(x, y, R) dy := I_1(\delta) + I_2(\delta)$$

onde  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  é pequeno o suficiente e

$$H(x, y, R) := \frac{1}{|x|x|^{-1}-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} \sup_{|z| \geq R|y|} |(z)^{a+2}|g(z)|$$

Assim, se  $\delta < \frac{1}{2}$ , usando o Lema 2.6 estimamos

$$\begin{aligned} I_1(\delta) &\leq \sup_{|x| \geq R} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|x|^{-1} - y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} dy \sup_{|z| \geq R\delta} |(z)|^{a+2} |g(z)| \\ &= C(2, n-2-a, n) \sup_{|z| \geq R\delta} |(z)|^{a+2} |g(z)| \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

e

$$\begin{aligned} I_2(\delta) &\leq \int_{|y| < \delta} \sup_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|x|^{-1} - y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} dy \sup_{|z| \geq 0} |(z)|^{a+2} |g(z)| \\ &= \int_{|y| < \delta} \frac{1}{|1 - y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^{a+2}} dy \|g\|_{H_{a+2}} \\ &= \int_0^\delta \frac{1}{|1 - r|^{n-2}} r^{n-(a+2)-1} dr \|g\|_{H_{a+2}} \\ &\leq \frac{\|g\|_{H_{a+2}}}{|1 - \delta|^{n-2}} \int_0^\delta r^{n-(a+2)-1} dr \\ &= \frac{\|g\|_{H_{a+2}}}{(n-2-a)|1 - \delta|^{n-2}} \delta^{n-(a+2)}. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Agora, passando o limite com  $R \rightarrow \infty$  em (5.1.6) e usando (5.1.7) e (5.1.8), obtemos

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |F(g)| \leq L_a \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |z|^{a+2} |g(z)| + \frac{\|g\|_{H_{a+2}}}{(n-2-a)|1 - \delta|^{n-2}} \delta^{n-(a+2)}. \quad (5.1.9)$$

Finalmente, como  $n - (a + 2) > 0$ , faça  $\delta \rightarrow 0$  em (5.1.9) para obter (5.1.1).  $\square$

**Prova do Teorema 5.1.** Tratamos a diferença  $u_1 - u_2$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2| &\leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a [|F(f_1 - f_2)| + |B(u_1) - B(u_2)| + |(V_1 - V_2)u_1| + |V_2(u_1 - u_2)|] \\ &\leq L_a (\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |f_1 - f_2| + \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |u_1| |u_1|^{p-1} - u_2 |u_2|^{p-1}| \\ &\quad + \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |(V_1 - V_2)u_1| + \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |V_2(u_1 - u_2)|), \end{aligned}$$

usando o Lema 5.4

$$\begin{aligned}
\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2| &\leq L_a (\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |f_1 - f_2| + p \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{a+2} |u_1 - u_2| (|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}) \\
&\quad + ||u_1||_{H_a} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^2 |V_1 - V_2| + ||V_2||_{H_2} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |(u_1 - u_2)|) \\
&\leq 0 + \frac{2^p \delta_a^{p-1} p L_a}{(1 - \tau)} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2| + 0 + L_a ||V_2||_{H_2} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2| \\
&= \left( \frac{2^p \delta_a^{p-1} p L_a}{(1 - \tau)} + L_a ||V_2||_{H_2} \right) \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2|.
\end{aligned}$$

Da prova do Teorema 3.1, sabemos que  $\frac{2^p \delta_a^{p-1} p L_a}{(1 - \tau)} + L_a ||V_2||_{H_2} < 1$ , sendo assim

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a |u_1 - u_2| = 0.$$

O outro caso segue análogamente.

# Bibliografia

- [1] B. ABDELLAOUI, I. PERAL and V. FELLI, *Existence and multiplicity for perturbations of an equation involving a Hardy inequality and the critical Sobolev exponent in the whole of  $\mathbb{R}^N$* , Adv. Differential Equations **9** (2004), no. 5-6, 481–508.
- [2] M. F. DE ALMEIDA and L. C. F. FERREIRA, *Self-similarity, symmetries and asymptotic behavior in Morrey spaces for a fractional wave equation*, Differential Integral Equations **25** (2012), no. 9-10, 957–976.
- [3] S. BAE, W.M. NI, *Existence and infinite multiplicity for an inhomogeneous semilinear elliptic equation on  $\mathbb{R}^n$* , Math. Ann. 320 (2001) 191-210.
- [4] P. BILER, M. CANNONE, I.A GUERRA, and G. KARCH *Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles*, Mathematische Annalen, vol. 330, no. 4, pp. 693-708, 2004.
- [5] G. BERNARD, *An inhomogeneous semilinear equation in entire space*, J. Differential Equations 125 (1996) 184-214.
- [6] J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics vol. 29, American Mathematical Society, 2000.
- [7] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, 1998.

- [8] V. FELLI, S. TERRACINI, *Elliptic equations with multi-singular inverse-square potential and critical nonlinearity*, Communications in Partial Differential Equations, vol. 31, no. 3, pp. 469-495, 2006.
- [9] V. FELLI, E. M. MARCHINI and S. TERRACINI, *On the behavior of solutions to Schrödinger equations with dipole type potentials near the singularity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 91–119.
- [10] V. FELLI and A. PISTOIA, *Existence of blowing-up solutions for a nonlinear elliptic equation with Hardy potential and critical growth*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), no. 1-3, 21–56.
- [11] L. C. F. FERREIRA and SANTOS, MATHEUS C. *Existence and symmetry for elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$  with arbitrary growth in the gradient*, Journal d'Analyse Mathématique (Jerusalem), 2014.
- [12] L. C. F. FERREIRA and C. A. A. S. MESQUITA, *Existence and symmetries for elliptic equations with multipolar potentials and polyharmonic operators*, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), no. 6, 1955–1982.
- [13] L. C. FERREIRA, M. MONTENEGRO, *Existence and asymptotic behavior for elliptic equations with singular anisotropic potentials*, Journal of Differential Equations, vol. 250, no. 4, pp. 2045–2063, 2011.
- [14] G. B. FOLLAND, *Real analysis: modern techniques and their applications* 2nd ed., Wiley-Interscience publication, 1999.
- [15] D. GILBARG, N. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [16] L. GRAFAKOS, *Classical Fourier analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 249 2nd ed., Springer, 2008.

- [17] E. H. LIEB, M. LOSS, *Analysis* 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics vol. 14, American Mathematical Society, 2001.
- [18] T.-Y. LEE, *Some limit theorems for super-Brownian motion and semilinear differential equations*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 2, 979–995.
- [19] D. SMETS, *Nonlinear schrödinger equations with hardy potential and critical nonlinearities*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 357, no. 7, pp. 2909–2938, 2005.